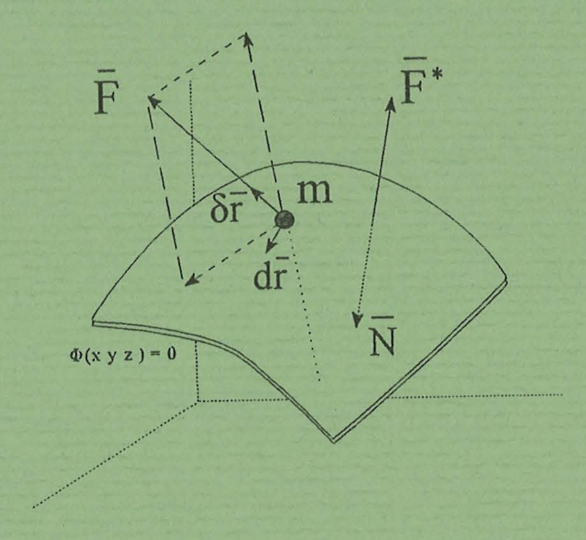
APUNTES SOBRE LA TEORÍA DE

CAMPOS

por

ISABEL MÁS ROBLEDO

SOBRE LAS LECCIONES TEÓRICAS IMPARTIDAS POR EL CATEDRÁTICO FÉLIX SORIANO SANTANDREU



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

APUNTES SOBRE LA TEORÍA DE

CAMPOS

por

ISABEL MÁS ROBLEDO

SOBRE LAS LECCIONES TEÓRICAS IMPARTIDAS POR EL CATEDRÁTICO FÉLIX SORIANO SANTANDREU

LECCIÓN 9 CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES
LECCIÓN 10 CAMPOS TENSORIALES Y CÁLCULO TENSORIAL
LECCIÓN 11 CAMPOS DE FUERZAS – PRINCIPIOS DE LA MECÁNICA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Apuntes sobre la teoría de campos

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 14.02
ISBN 84-89977-74-7
Depósito Legal: M-16071-1999

CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

9.1 CONCEPTO DE CAMPO. CAMPO ESCALAR Y VECTORIAL.

En general entenderemos por *Campo* un conjunto de valores unívocamente ligados a cada posición en un espacio geométrico ordinario. Se trata de una relación *unívoca* porque a cada punto le corresponderá en cada instante un único valor, aunque dicho valor podrá *variar* o permanecer *estacionario* a lo largo del tiempo; sin embargo no es biunívoca ya que un mismo valor podrá corresponder en cada instante a más de una posición.

Cuando la magnitud física a la que pueda asociarse un campo sea una magnitud escalar, por ejemplo la temperatura, el campo correspondiente se denominará *CAMPO ESCALAR* y vendrá expresado analíticamente mediante una función del vector de posición $\vec{r}$ y del tiempo t en su caso (función escalar de variable vectorial). Así, si una habitación está calentada desigualmente, a cada punto de su interior corresponderá, en general, una temperatura diferente según su localización que podrá variar además en el tiempo. La descripción matemática de dicha situación corresponderá a establecer la función que haga corresponder a cada punto, en cada instante, el valor correspondiente de la temperatura.

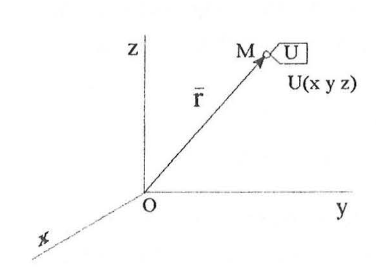


Figura 9.1

Tendremos, pues, definido un CAMPO ESCALAR en un espacio geométrico ordinario cuando a cada punto, en cada instante, le corresponda un escalar determinado analíticamente mediante una función del parámetro tiempo y de su localización geométrica en el espacio de referencia:

$$U = U(\vec{r}, t) \qquad (9.1)$$

que se podrá expresar también utilizando coordenadas cartesianas como una función de cuatro variables $U = U(x, y, z, t)$.

Análogamente, cuando la magnitud a la que pueda asociarse un campo sea una magnitud vectorial, por ejemplo la velocidad de las partículas de un sistema material rígido o de un fluido que diferirán, por lo general, de un punto a otro, el campo correspondiente se denominará *CAMPO VECTORIAL* y cada una de las componentes de los vectores del campo vendrán expresadas analíticamente mediante una función del vector de posición $\vec{r}$ y del tiempo t en su caso.

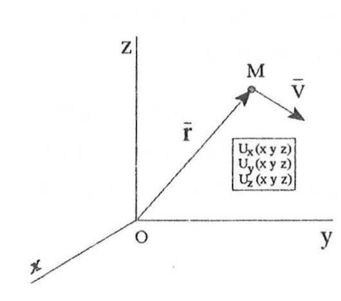


Figura 9.2

Su expresión analítica se obtendrá, en este caso, mediante una función vectorial (de variable vectorial; es decir, de las coordenadas del punto y del tiempo):

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t) \qquad (9.2)$$

donde cada una de las componentes del vector será una función escalar dependiente de las coordenadas del punto y del tiempo t, que en notación cartesiana adoptará la forma: $\vec{V} = V_x(x, y, z, t)\vec{i} + V_y(x, y, z, t)\vec{j} + V_z(x, y, z, t)\vec{k}$

Tendremos, entonces, definido un CAMPO VECTORIAL en un espacio geométrico ordinario cuando a cada punto, en cada instante, le corresponda un vector determinado analíticamente mediante una función vectorial del parámetro tiempo y de su localización geométrica en el espacio de referencia.

Utilizando la notación compacta podríamos escribir: $U = U(x_1, x_2, x_3, t)$ y $\vec{V} = \vec{V}(x_1, x_2, x_3, t)$ o, aún más sencillamente: $U = U(x_i, t)$, $\vec{V} = U_i(x_i, t)\,\vec{u}_i$, pero la más significativa puede ser la notación vectorial empleada en *(9.1)* y *(9.2)* donde se indica que la función depende del vector posición $\vec{r}$ e incluso extender estos conceptos al caso en que, en lugar del vector $\vec{r}$, se considere otro vector cualquiera definido unívocamente para cada punto del espacio.

Los campos se clasifican en **VARIABLES**, en general cuando dependen de *t*, y en **ESTACIONARIOS** o permanentes cuando las funciones asociadas no dependen del tiempo sino únicamente de las coordenadas del punto, pudiéndose expresar en tal caso, limitándonos exclusivamente a escalares y vectoriales, como $U = U(\vec{r}, t)$ y $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r})$. En la práctica nos interesará lo fácil; es decir, conseguir que el parámetro tiempo no intervenga. Por ejemplo, en el acondicionamiento de un local para que la temperatura no varíe según el momento del día como ocurre en el exterior.

Asimismo diremos que un campo será **UNIFORME** cuando todos los puntos del espacio geométrico considerado tengan asociada las mismas magnitudes, aunque puedan ser a su vez variables porque cambien en el tiempo para todos los puntos igual. Por ejemplo, en el cálculo de conductos de instalaciones nos interesará que el campo de velocidades sea uniforme (régimen laminar) para evitar turbulencias, aunque en este caso veremos que intervendrán otros factores en la realidad por los cuales aunque los vectores sean paralelos, las velocidades de las partículas próximas a las paredes de los conductos serán menores a las del centro. En el caso del campo de intensidades gravitatorias admitiremos que es uniforme sólo para ámbitos muy pequeños en los que no se aprecie la curvatura de la tierra (para que los vectores sean *"casi"* paralelos) y para altitudes muy próximas para que no se aprecien las diferencias en el valor de g=9,8 Nw/Kg^2 (mal conocida como "aceleración de la gravedad" g=9,8 m/sg^2).

9.2 REPRESENTACIONES GRÁFICAS: PROBLEMA REAL.

En general, supondremos que todas las funciones que intervienen en los campos son continuas, derivables y uniformes, o lo que es lo mismo, le corresponde un sólo valor de la función a cada punto del espacio (obviamente es el punto geométrico, no el material el que tiene asociado el campo), aunque la relación no será biunívoca pudiendo tener varios puntos un mismo valor.

Conocidas las funciones tendríamos perfectamente definido el campo, pero el problema real es que por lo general se van a desconocer dichas funciones. Se sabe que existen, pero no se conocen las expresiones que las definen y se llegará a ellas por aproximación a la realidad mediante interpolación de algunos valores obtenidos empíricamente. Obviamente su aproximación dependerá de algunos factores como el grado de exactitud en los cálculos, el nº de puntos (nube) medidos...etc. Hoy día, con ayuda de los medios electrónicos e informáticos de que disponemos lo mejor es pues guiarnos de unas **INDICATRICES** que nos permitan determinar, por ejemplo, cuántos tienen el mismo valor a un punto dado o cómo varían los valores en las proximidades de un punto.

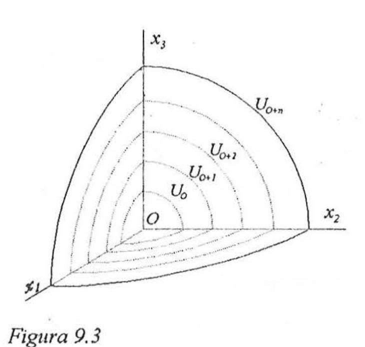


Figura 9.3

Para expresar de un modo gráfico un campo escalar se suele representar el lugar geométrico de los puntos del espacio en los que el campo adopta un mismo valor; es decir las llamadas **SUPERFICIES EQUIESCALARES** (*fig.9.3*) que son las que resultan al dar a la función U valores numéricos definidos:

$$\begin{aligned} U(x_i, t) &= U_0 \\ U(x_i, t) &= U_1 \\ \dots\ &\dots\ \dots \\ U(x_i, t) &= U_n \end{aligned} \qquad (9.5)$$

Por ejemplo, si tenemos un campo $T = k\,(x^2 + y^2 + z^2 + ct^2)$ las superficies equiescalares se obtendrán dando valores a T en cada instante t de forma que la expresión $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{T}{k} - ct^2$ responderá a esferas de radio $r^2 = \frac{T}{k} - ct^2$.

Frecuentemente, las diferencias U_1-U_0, U_2-U_1, ... se procura tengan valores constantes. En el caso particular de que estas diferencias valgan la unidad, las superficies equiescalares corresponderían a valores de la magnitud escalar U_0, U_{0+1}, U_{0+2}, ... U_{0+n}, que se mantendrían constantes sobre cada superficie. Si, por ejemplo, se tratase de un campo de temperatura, el dibujo de estas superficies, que se llamarían "*isotermas*", nos permitiría ver, de una ojeada, la posición de las regiones cálidas o frías. Pero su aplicación se extiende también a funciones derivadas de otras vectoriales o tensoriales de las que solo interviene o interesa la componente normal a un plano fijo, como es el caso de la presión (las isobaras nos dan los puntos de igual presión atmosférica) o de la iluminancia en el plano de trabajo (las curvas isolux nos dan los puntos con igual nivel de iluminación) ... etc. ya que la representación del campo original no siempre tiene interés o aplicación.

Sin embargo para ciertas magnitudes es útil la representación del campo vectorial y como el módulo del vector del campo solamente, por lo general, no dice nada puesto que se trata de magnitudes "*dirigidas*", resulta preciso buscar otro tipo de representación. El visualizar los puntos con igual módulo de vector si éstos tienen dirección arbitraria no parece tener mucha aplicación pero sí podría tenerlo el saber los puntos de un entorno cuyos vectores tuviesen la misma dirección, aún teniendo distinto módulo. Nos aprovecharemos, por tanto, de la propiedad ya utilizada anteriormente de la tangencia de vectores a líneas (véase las trayectorias) para definir las indicatrices de los campos vectoriales como la familia de líneas envolventes de los vectores del campo o, dicho de otro modo, la familia de líneas a las que son tangentes los vectores del campo en cada instante, que denominaremos **LÍNEAS DE CAMPO o LÍNEAS DE VECTOR**. Para su representación (*fig.9.4*) trazaremos algunas de éstas líneas según los siguientes convenios de dibujo:

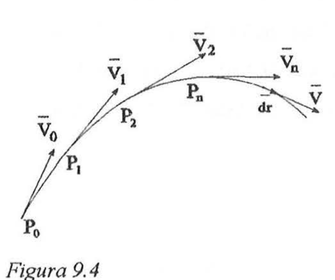


Figura 9.4

Partiendo de un punto P_0 nos trasladaremos a otro muy próximo, P_1, en la dirección y sentido del campo en P_0, $\vec{V}_0$, trazando el segmento $\overline{P_0P_1}$. El valor del campo en P_1 será algo diferente que en P_0 y describiremos un nuevo segmento $\overline{P_1P_2}$, pequeño, en la dirección del campo en P_1, $\vec{V}_1$. Representado el campo en P_2, $\vec{V}_2$, continuaríamos el proceso, obteniendo una línea quebrada $P_0P_1P_2...P_n$. El límite de esta línea, cuando los puntos P_1 P_2 ... P_n tienden a aproximarse indefinidamente entre sí, es lo que se denomina línea de vector y tiene la propiedad de que la dirección de la tangente en cada uno de sus puntos coincide con la dirección del campo en el mismo.

En primer lugar sabemos que son líneas porque planteamos el problema inverso: dadas las tangentes encontrar una curva envolvente y su ecuación matemática se obtendrá expresando el paralelismo entre el segmento infinitesimal de la misma $d\vec{r}dx_i\,\vec{u}_i$ y el vector campo $\vec{V}_i$ en el punto considerado; esto es, $\lambda\, d\vec{r} = \vec{V}$:

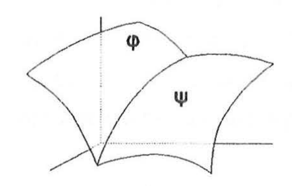
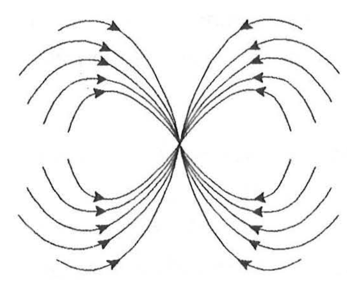


Figura 9.5

$$\left|\begin{array}{l} \lambda\, dx = U_x(x,y,z,t) \\ \lambda\, dy = U_y(x,y,z,t) \\ \lambda\, dz = U_z(x,y,z,t) \end{array}\right| \Rightarrow \textit{eliminando } \lambda \Rightarrow \qquad (9.6)$$

$$\frac{dx}{U_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{U_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{U_z(x,y,z,t)}$$

equivalente a un sistema de dos ecuaciones diferenciales que integradas nos dan dos familias de superficies (con dos ctes. de integración) $\begin{matrix}\varphi(x\,y\,z\,t) = 0 \\ \psi(x\,y\,z\,t) = 0\end{matrix}$ cuyas intersecciones para cada valor de las ctes. y de t serán líneas que no podrán cortarse entre sí porque al cambiar los parámetros cambiarán las superficies pero serán superficies de la misma familia.


Figura 9.6

También puede justificarse porque si se cortasen en un punto existirían dos valores de la función para ese punto, lo cual no es posible. Otra cosa es que se trate de un punto donde concurran todas las líneas de vector que se denominarán **FUENTES** o **SUMIDEROS** y evidentemente éstos son puntos particulares del campo (*fig.9.6*).

Claro que la integración analítica no tiene por qué ser nada fácil pero con los medios actuales se puede recurrir a la resolución gráfica por puntos que puede calcular el ordenador.

Por ejemplo, dado el campo vectorial $\vec{v} = (cy - bz)\vec{i} + (az - cx)\vec{j} + (bx - ay)\vec{k}$ haremos $\frac{dx}{cy-bz} = \frac{dy}{az-cx} = \frac{dz}{bx-ay}$ que mediante el recurso de multiplicar cada numerador y denominador por el mismo valor nos proporcionará, al sumar todos los numeradores y todos los denominadores, unas expresiones diferenciales de inmediata integración:

$$\frac{adx}{acy-abz} = \frac{bdy}{abz-bcx} = \frac{cdz}{bcx-acy} = \frac{adx+bdy+cdz}{0} \qquad \text{de donde} \qquad ax+by+cz=c_1$$

$$\frac{xdx}{cxy-bxz} = \frac{ydy}{ayz-cxy} = \frac{zdz}{bxz-ayz} = \frac{xdx+ydy+zdz}{0} \qquad\qquad x^2+y^2+z^2=c_2$$

que representan la intersección de la familia de esferas de centro el origen y radio $r^2=c_2$ con la familia de planos paralelos dados por c_1

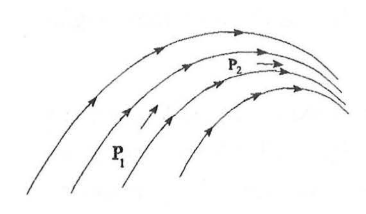


Figura 9.7

Por último, para indicar el sentido del campo utilizaremos cabezas de flecha sobre las líneas de vector y, para dar una idea de su intensidad, convendremos en dibujar (*fig.9.7*) tantas líneas a través de la unidad de área ortogonal al campo en cada punto como unidades tenga el módulo del campo en él. Naturalmente, esto sólo puede hacerse de modo aproximado ya que el campo varía de un punto a otro sobre la unidad de superficie. De esta forma conoceremos los lugares donde el campo es más intenso (p.ej. P_2) según las líneas de vector estén más o menos próximas entre sí.

9.3 GRADIENTE DE UN CAMPO ESCALAR.

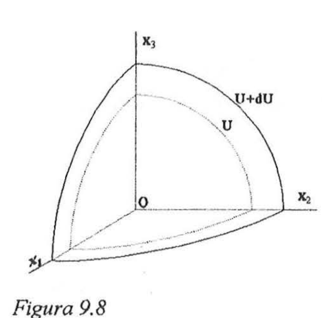


Figura 9.8

Dado que por cada punto pasa una superficie equiescalar, observamos que moviéndonos por una de esas superficies el valor del campo no varía pero si cambiamos de superficie obviamente cambia dicho valor. Se trata de averiguar ahora cómo varía el valor del campo al cambiar la posición geométrica y con qué intensidad lo hace en función de la dirección del desplazamiento que vaya a efectuar ya que, en una primera aproximación, intuimos que dicha variación dependerá de la posición en el espacio geométrico, es decir, nos encontramos ante un campo derivado del campo escalar, pero, fundamentalmente, dependerá de la orientación y, en consecuencia, no podrá ser una magnitud escalar.

Efectuando un desplazamiento en el entorno del punto (por supuesto pequeño para no perder de vista lo que pasa en el proceso) que llamaremos $d\vec{r}$, admitiremos que la variación de la función escalar U es infinitesimal $\Delta U = dU + \frac{1}{2!} d^2U + \ldots$ y despreciando los infinitésimos de orden superior vendrá dada por su diferencial total:

$$\Delta U \simeq dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \frac{\partial U}{\partial x_i}dx_i \qquad (9.7)$$

que interpretaremos como "la suma de lo que varía en cada una de las tres direcciones proporcionalmente al desplazamiento dado en ellas" (variación por unidad de longitud por la componente del desplazamiento en esa dirección), admitiendo la superposición lineal de efectos con la arbitrariedad que ello implica. Pero no cabe duda que esto es solo una aproximación ya que habría que saber el valor del campo escalar en un punto para obtener el valor de la función en los puntos cercanos y así sucesivamente para conocerlo en todos los puntos. Para tantear su significado consideraremos el resultado.

Como se trata de relacionar la variación de U con el desplazamiento diferencial dado $d\vec{r}$ y las componentes de este vector aparecen reflejadas en la expresión (*9.7*), podemos interpretarla como el producto escalar de $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ por otro vector que nos inventamos, definido por:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = g\vec{r}ad\, U \qquad (9.8)$$

que denominamos gradiente del campo por indicar una variación derivada de un desplazamiento, ya que resulta:

$$dU = g\vec{r}ad\,U \cdot d\vec{r} \qquad (9.9)$$

El vector gradiente podrá expresarse también introduciendo un vector simbólico (nabla) $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ en la forma $\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x_i}\vec{u}_i = g\vec{r}ad\,U = \vec{V}$ y dado que U es función de las coordenadas del punto (función escalar de variable vectorial), sus derivadas parciales y, por tanto el vector gradiente, también lo serán, obteniéndose, en general, una función vectorial de variable vectorial. Es decir, si bien obtendremos, particularizado a cada posición, el vector gradiente del campo en el punto considerado, acabamos de determinar un campo vectorial especial por derivar de otro escalar.

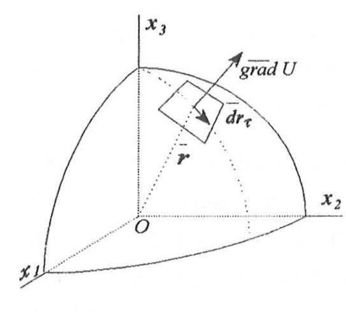


Figura 9.9

Obviamente dU será nulo si nos movemos sobre la propia superficie equiescalar que pasa por el punto para el que particularizamos el gradiente, ya que U (*fig.9.9*) tendrá el mismo valor. En tal caso $d\vec{r}_\tau$ será un vector contenido en el plano tangente a la superficie por dicho punto y, dado que, en general, el gradiente no será nulo, la dirección de $g\vec{r}ad\,U$ tendrá que ser ortogonal al plano para que sea nulo el producto escalar de ambos vectores $dU = g\vec{r}ad\,U \cdot d\vec{r}_\tau = 0$ coincidiendo, por tanto, con la ***normal a la superficie equiescalar en cada punto***. En consecuencia, las líneas de vector del campo de gradientes serán también ortogonales a las superficies equiescalares constituyendo lo que en matemáticas se denomina "*trayectorias ortogonales a la familia de superficies U*".

Para conocer el sentido de $g\vec{r}ad\,U$ nos moveremos en la propia dirección del vector gradiente y como es arbitrario diremos que su valor será positivo cuando tenga ***el sentido de los valores crecientes de U*** ya que, denominando *dn* al módulo de $d\vec{r}_n$ podremos escribir:

$$dU_n = |g\vec{r}ad\,U|\,|d\vec{r}_n|\cos\begin{vmatrix} 0 & = & +1 \\ \pi & & -1 \end{vmatrix} = \pm\,|g\vec{r}ad\,U|\,dn \qquad (9.10)$$

donde el producto escalar se ha reducido al producto de los módulos por tratarse de vectores con la misma dirección.

Por último, para averiguar el módulo de $\vec{grad}\,U$ buscaremos igualmente el avance en la propia dirección del vector para eludir el parámetro φ en la expresión $|\vec{grad}\,U| = \frac{dU}{|d\vec{r}|\cos\varphi}$, por lo que tendremos:

$$|\vec{grad}\,U| = \frac{dU}{dn} \qquad (9.11)$$

que podríamos interpretar como ***la variación del campo U*** *"por unidad de longitud"* ***según la dirección de la normal*** a la superficie equiescalar en cada posición. Por tanto, si introducimos el vector unitario en dicha dirección y sentido el de los valores crecientes de U podremos escribir la expresión vectorial del gradiente en la forma:

$$\vec{grad}\,U = \frac{dU}{dn}\vec{r}_n \qquad (9.12)$$

cuyo significado será el de un vector que, en cada punto donde la función U y sus derivadas primeras estén definidas, indicará la dirección y sentido de máxima variación del campo escalar, así como su valor.

Así, por ejemplo, dado el campo escalar $U = x^2 + y^2 + z^2$, estacionario al no depender de t, cuyas superficies equiescalares $U = r^2$ son las esferas con centro el origen de referencia, el campo de gradientes será: $\vec{grad}\,U = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k} = 2\vec{r}$ es decir, el vector gradiente en cada punto tendrá la misma dirección del vector de posición correspondiente (*de donde se deduce que las líneas de vector del campo serán el haz de rectas que se cortan en el propio origen de coordenadas*) y su módulo será 2r como se comprueba al ser $\frac{dU}{dr} = 2r = |\vec{grad}\,U|$.

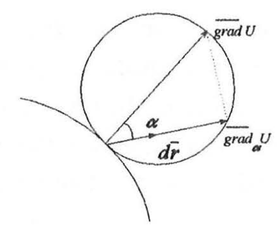


Figura 9.10

No obstante la expresión *(9.9)* permite también determinar cuánto varía U en cualquier otra dirección ya que realizando un desplazamiento direccional infinitesimal $d\vec{r}$ que forme un ángulo α con la dirección del gradiente será: $dU = grad\,U \cdot \cos\alpha \cdot dr$, de donde obtenemos la "variación por unidad de longitud" en esa dirección o, más adecuadamente, la ***derivada direccional***:

$$\frac{dU}{dr} = grad\,U \cdot \cos\alpha = grad_\alpha U = \vec{grad}\,U \cdot \vec{e}_\alpha \qquad (9.13)$$

expresable también simbólicamente como $grad_\alpha$ U que se denomina "gradiente de U según la dirección que forma un ángulo α con la de máxima variación", que equivale a proyectar $\vec{grad}\ U$ sobre la dirección de $d\vec{r}$ *(fig.9.10)* o, lo que es igual, a multiplicar escalarmente el vector gradiente por el unitario correspondiente.

Si se considera como magnitud vectorial, la derivada direccional se deberá multiplicar por un vector unitario según la dirección considerada y el lugar geométrico de estos vectores será una esfera tangente a la superficie equiescalar cuyo diámetro es grad U, observándose que la definición (*9.11*) inicial de gradiente corresponde a sumar vectorialmente el valor del gradiente de U según cada una de las tres direcciones que corresponden a los ejes. Si uno de los ejes, p. ej. el ox, es ortogonal en un punto a alguna de las superficies equiescalares, el gradiente en dicho punto será $\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}$, expresión equivalente a la (*9.12*). Esta última fórmula está matemáticamente bien definida si se define U en función de las distancias al punto considerado según la normal y dos direcciones ortogonales entre sí situadas en el plano tangente.

Nótese, por último, que el resultado sería totalmente distinto si tratásemos de averiguar la variación de un campo vectorial $\Delta\vec{V} = d\vec{V} + \frac{1}{2!}d^2\vec{V} + \ldots$. Despreciando igualmente infinitésimos de orden superior tendríamos:

$$\Delta\vec{V} \simeq d\vec{V} \simeq d\left[V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right] = \left|\frac{\partial V_x}{\partial x}dx + \frac{\partial V_x}{\partial y}dy + \frac{\partial V_x}{\partial z}dz\right|\vec{i} + \left|\frac{\partial V_y}{\partial x}dx + \frac{\partial V_y}{\partial y}dy + \frac{\partial V_y}{\partial z}dz\right|\vec{j} + \left|\frac{\partial V_z}{\partial x}dx + \frac{\partial V_z}{\partial y}dy + \frac{\partial V_z}{\partial z}dz\right|\vec{k} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Vmatrix} = \vec{grad}\,\vec{V} \cdot d\vec{r}$$

es decir, nuestro "vector" gradiente tendría 9 componentes siendo necesario recurrir a la notación tensorial.

9.4 FLUJO DE UN CAMPO VECTORIAL. DIVERGENCIA.

De modo análogo a cómo el campo de gradientes de un campo escalar relaciona, mediante una expresión analítica, la distribución espacial del campo según superficies equiescalares con la variación de la función, a continuación analizaremos la correspondencia entre un campo vectorial y otro campo (en este caso escalar) que permitirá relacionar analíticamente la distribución espacial de aquél según las líneas de vector con la variación del campo vectorial en el entorno de cada posición.

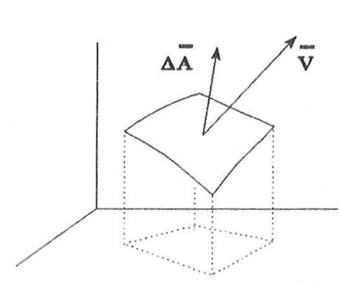


Figura 9.11

Para ello, dado un elemento de superficie ΔA representado por el vector normal cuyo módulo coincide con el área y su sentido se relaciona con el de recorrido del contorno de la superficie, según la regla del sacacorchos (*fig.9.11*), necesitamos definir el "*flujo elemental*" de un campo vectorial $\vec{V}$ a través del elemento de área ΔA, como el resultado de realizar el producto escalar:

$$\Delta\varphi = \vec{V} \cdot \Delta\vec{A} \qquad \textit{(9.15)}$$

donde $\vec{V}$ es el valor de la función vectorial en un punto de ΔA, que puede ser cualquiera pues el elemento de superficie se supone muy pequeño (en el límite, infinitesimal, dA).

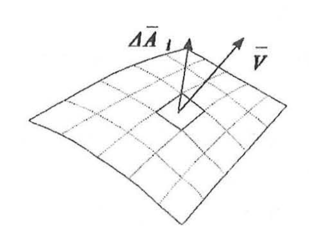


Figura 9.12

Si se trata de una superficie finita A, la dividiremos en pequeños elementos de área ΔA_i (fig.9.12) y, considerados como vectores, obtendremos el flujo a través de A como límite de la suma de los flujos elementales a través de todos los elementos de superficie; es decir:

$$\varphi = \lim \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \cdot \Delta\vec{A}_i = \iint_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad \textit{(9.16)}$$

Como se indica, el límite no es otra cosa que la integral sobre la superficie (integral doble) del producto escalar $\vec{V} \cdot d\vec{A}$ y generalmente es finito pues, aunque el tamaño de cada elemento tiende a cero, su número aumenta indefinidamente.

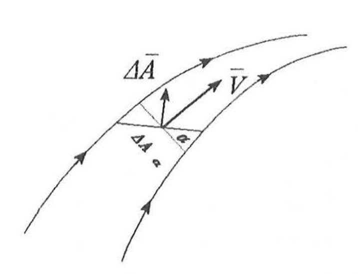


Figura 9.13

Si se ha dibujado el campo vectorial de acuerdo con las prescripciones indicadas en §*9.2*, el resultado de calcular el flujo a través de una superficie coincide con el número de líneas de fuerza que la atraviesan. Efectivamente (*fig.9.13*), el producto escalar puede escribirse:

$$\vec{V} \cdot \Delta\vec{A} = V \cdot \Delta A \cdot \cos\alpha = V \cdot \Delta A_\alpha \qquad \textit{(9.17)}$$

donde ΔA_α es la proyección de ΔA sobre el plano normal al campo $\vec{V}$.

Como el módulo de $\vec{V}$ mide el número de líneas de campo que atraviesan la unidad de área transversal, el valor $V\Delta A_\alpha$ será la contribución del elemento ΔA al número de líneas que atraviesan un área finita y la suma (*9.15*) nos da el número total de líneas que atraviesan la superficie A. En este sentido cabe definir lo que se denomina "*tubo de corriente*" como la superficie formada por el conjunto de todas las líneas de vector que pasan por los puntos de una línea cerrada. Si esta línea es sencilla, dicha superficie tiene, en efecto, la forma de un tubo. Evidentemente, el flujo a través de cualquier elemento de superficie de uno de estos tubos es nulo, pues $\Delta\vec{A}_i$ será ortogonal al vector del campo $\vec{V}$.

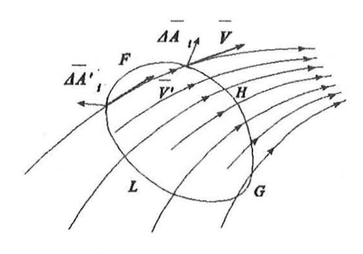


Figura 9.14

En el caso de una superficie cerrada, donde se toma como positivo el sentido de la normal exterior, el ángulo α puede ser superior a 90°, en cuyo caso el flujo se contaría negativamente. Se entenderán, por tanto, como positivas las líneas "salientes" (flujo saliente) que en la fig. *9.14* pasan a través del área FHG y como negativas las "entrantes" (flujo entrante) que atraviesan el área FGL, de manera que al calcular el flujo total a través de la superficie obtendremos la diferencia entre el número de líneas que salen y que entran, es decir, las que nacen en el interior de la superficie si el flujo total es positivo (o mueren si es negativo).

En la figura *9.14* , el flujo será positivo e igual aproximadamente a 2, pero en otra posición el flujo del campo a través de la misma superficie podría adoptar otro valor en función de sus características, por lo que parece útil definir una magnitud que establezca una relación entre el número de líneas de vector que nacen o mueren en el entorno de cada posición, independientemente de la superficie a considerar.

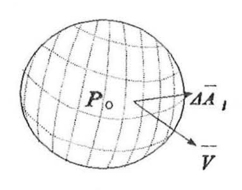


Figura 9.15

Para obtenerla analíticamente tomaremos una superficie pequeña encerrando un volumen $\Delta\tau$ y dividiremos su área en un número n relativamente alto de elementos de área ΔA_i (*fig. 9.15*), de forma que la expresión $\sum_{i=1}^{n} \frac{\vec{V}_i \cdot \Delta\vec{A}_i}{\Delta\tau}$ tendrá un valor, en general, finito aún cuando supongamos que la superficie se contraiga en el entorno de un punto genérico P de forma que $\Delta\tau \to 0$.

Como el numerador mide la diferencia entre el nº de líneas de campo que salen y entran de la superficie y dividimos por el volumen encerrado en ella, dicho cálculo correspondería al número de líneas de campo que nacerían (o morirían) por unidad de volumen si el espacio encerrado fuera lo suficientemente pequeño para admitir que apenas variaría el valor del campo en él. Por tanto, cuando nos limitamos al entorno del punto haciendo $\Delta\tau \to 0$, el valor obtenido será una característica del campo en ese punto que no puede depender de la forma de la pequeña superficie considerada, ni de cómo se realice la operación de límite en torno a P, obteniéndose un resultado unívoco que se denomina ***DIVERGENCIA*** del campo vectorial en el entorno de P y se expresa como:

$$div\ \vec{V} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{1}^{n} \frac{\vec{V}_i \cdot \Delta\vec{A}_i}{\Delta\tau} \qquad \textbf{(9.18)}$$

Es decir, si el resultado del cálculo indicado fuese, por ejemplo, ***a***, esto significaría que si en la unidad de volumen el campo tuviese las características que tiene en un entorno de P, nos sería preciso hacer nacer "***a***" líneas por unidad de volumen para dibujarlo adecuadamente. Si no nacen ni mueren líneas de campo en una región del espacio, en ella se verificará que el flujo total a través de cualquier superficie cerrada será nulo $\iint \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$ pero si el campo vectorial del que procede es de tal naturaleza que no se precisa, para representarlo, hacer nacer (o morir) líneas de campo, por prolongarse indefinidamente o por cerrarse sobre sí mismas, se verificará que en todos los puntos $div\ \vec{V} = 0$ y ésta será la característica matemática de un campo ***SOLENOIDAL***.

La magnitud que se obtiene es, evidentemente, un escalar asociado al punto P que puede variar de un punto a otro del espacio en función de cómo varíe el campo vectorial y así como la operación gradiente nos permite asociar un campo vectorial a uno escalar, esta operación, generalizada a todos los puntos del espacio a que se extiende el campo vectorial $\vec{V}$, nos permite asociar un campo escalar a otro vectorial ya que, en general:

$$div\ \vec{V}(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t) \qquad \textbf{(9.19)}$$

aún cuando pueda obtenerse un campo uniforme (independiente de la posición) y permanezca estacionario a su vez en el transcurso del tiempo como veíamos para todo campo escalar.

Para encontrar la expresión de la divergencia en coordenadas cartesianas y dado que el resultado de aplicar la expresión (*9.18*) no depende de la forma de la superficie, supongamos que se trata de un sencillo paralelepípedo cuyas caras son paralelas a los planos coordenados y que $\vec{V}$ es el valor del campo en el punto central.

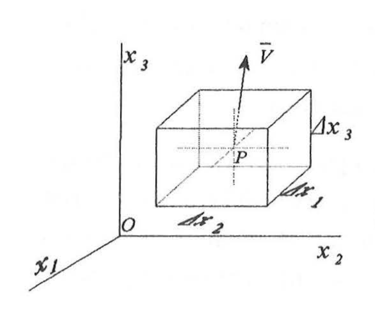


Figura 9.16

A través de la pareja de caras paralelas al plano ox_2x_3 solo producirá flujo la componente V_1 ortogonal a ellas (*fig.9.16*), cuyo valor, para la cara anterior y posterior respectivamente, será, despreciando términos en Δx_i^2:

$$V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{2} \qquad V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{2}$$

resultando para el flujo de la componente V_1:

$$\Delta\varphi_1 = \left(V_1 + \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{2}\right)\Delta x_2\,\Delta x_3 - \left(V_1 - \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\frac{\Delta x_1}{2}\right)\Delta x_2\,\Delta x_3 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\Delta x_1\,\Delta x_2\,\Delta x_3$$

Al considerar las tres parejas de caras paralelas tendremos para expresión del flujo total: $\Delta\varphi = \Sigma\vec{V}_i\cdot\Delta\vec{A}_i = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}+\frac{\partial V_2}{\partial x_2}+\frac{\partial V_3}{\partial x_3}\right)\Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$ y como el volumen del paralelepípedo es $\Delta\tau = \Delta x_1\Delta x_2\Delta x_3$, quedará:

$$div\,\vec{V} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{u}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{u}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{u}_3\right)\cdot\left(V_1\vec{u}_1 + V_2\vec{u}_2 + V_3\vec{u}_3\right) = \nabla\cdot\vec{V} \qquad (9.20)$$

que es la expresión buscada mediante el operador nabla definido con anterioridad.

9.5 CIRCULACIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL. ROTACIONAL.

Para una línea AB cualquiera, situada en un campo vectorial, el vector del campo $\vec{V}$ adoptará, por lo general, un valor diferente en cada uno de sus puntos, por lo que descomponiéndola en elementos de arco muy pequeños de forma que pueda admitirse despreciable la variación de $\vec{V}$ en cada uno de ellos (*fig.9.17*) definiremos circulación elemental del vector como el producto escalar $\Delta C = \vec{V}\cdot\Delta\vec{r}$.

La suma de las circulaciones elementales para todos los elementos de arco definidos entre A y B se denomina "*circulación del vector $\vec{V}$ a lo largo de la línea AB*" y se expresará en el límite, cuando $\Delta\vec{r}\to 0$, mediante la integral:

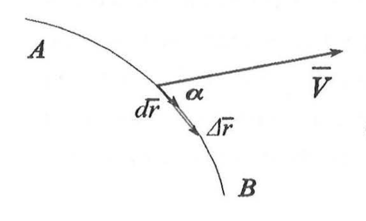


Figura 9.17

$$C = \lim_{\Delta r_i \to 0} \Sigma\,\vec{V}_i\cdot\Delta\vec{r}_i = \int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{r} \qquad (9.21)$$

o bien, si $\vec{V}$ está expresado en cartesianas $\vec{V} = V_1(x_i)\vec{u}_1 + V_2(x_i)\vec{u}_2 + V_3(x_i)\vec{u}_3 = V_i\vec{u}_i$

$$C = \int_A^B V_1dx_1 + V_2dx_2 + V_3dx_3 = \int_A^B V_idx_i \qquad (9.22)$$

En el caso de que el integrando pueda expresarse como diferencial de una función escalar U, esta integral no dependerá del camino recorrido, sino únicamente de los puntos A y B inicial y final del mismo, ya que entonces:

$$\overset{B}{\underset{A}{C}} = \int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_A^B dU = U_B - U_A \qquad (9.23)$$

pudiéndose considerar el campo vectorial como campo de gradientes de un campo escalar ya que, de acuerdo con la (*9.9*), $\vec{V}\cdot d\vec{r} = \vec{grad}\,U\cdot d\vec{r} = dU$.

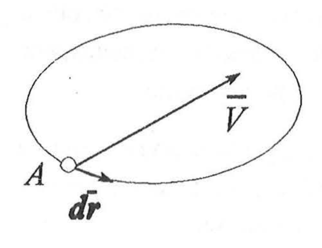


Figura 9.18

Diremos entonces que $\vec{V}^* = g\vec{r}ad\,U$ es "*conservativo*" pues si la línea es cerrada (*fig.9.18*) tendremos:

$$C = \oint \vec{V}^* \cdot d\vec{r} = U_A - U_A = 0 \quad .$$

No ocurrirá igual si la función no tiene primitiva (ni siquiera es integrable) debiendo sustituir las variables en función de los parámetros de la curva descrita que serán distintos cuando el punto pasa por A y por B≡A.

Mediante un proceso análogo al seguido para la definición de la divergencia a partir del flujo de un campo vectorial intentaremos definir ahora una nueva magnitud que denominaremos ***ROTACIONAL*** del campo vectorial para expresar *la circulación del vector del campo en el entorno del punto*, para lo cual necesitamos delimitarlo mediante unas superficies elementales arbitrarias que en el límite, cuando $\Delta A_i \to 0$, encerrarán el propio punto P.

Dado que la circulación del vector del campo a lo largo de la línea que encierran una de esas superficies elementales es un producto escalar, el valor que obtendremos "por unidad de superficie" $\frac{\Delta C}{\Delta A}$ no resultará representativo de su orientación a pesar de que resulta obvio que así será, por lo que intuimos ya que dicha magnitud habrá de ser vectorial.

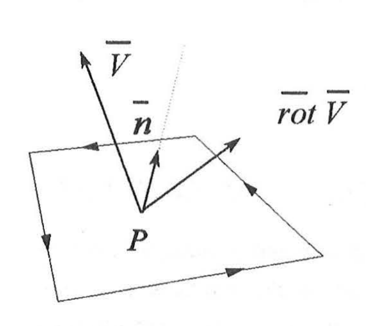


Figura 9.19

Consideraremos, por tanto, una línea plana y cerrada que limite un área ΔA situada en un campo vectorial $\vec{V}$ y tomando un sentido de recorrido la dividiremos en pequeños segmentos de cuerda $\Delta\vec{r}_i$, calculando el producto $\vec{V}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$ que, en el límite, será la circulación (distinta de cero si el campo no es conservativo) del vector $\vec{V}$ a lo largo de dicha línea. Definiremos la ***componente sobre la normal*** al plano (con el sentido que corresponda aplicando la regla del sacacorchos a $\Delta\vec{r}_i$) ***del*** nuevo vector que llamaremos ***Rotacional*** de $\vec{V}$ a la cantidad:

$$rot_n\vec{V} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Sigma\,\vec{V}_i \cdot \Delta\vec{r}_i}{\Delta A} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta A} = r\vec{o}t\,\vec{V} \cdot \vec{n} \qquad \textbf{(9.24)}$$

que puede entenderse asimismo como la proyección de ese vector denominado rotacional sobre la normal o, en otras palabras, como el producto escalar por el unitario según la normal.

Si P es un punto en cuyo entorno se mantiene la línea para $\Delta A \to 0$, podremos trazar otros dos planos -de modo que P sea el vértice de un triedro trirrectangular- y trazando sendas líneas cerradas sobre ellos calcularemos, mediante (*9.24*), las componentes, según las direcciones ortogonales a ambos, de $r\vec{o}t\ \vec{V}$, obteniendo así las tres componentes, según las aristas del triedro, que pudieran definir un vector. Esto no es evidente ya que se requiere que dicho vector resulte el mismo aunque se le defina a partir de otros planos cualesquiera de los infinitos que pueden pasar por P.

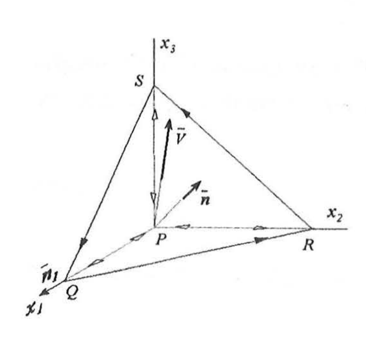


Figura 9.20

Para comprobar que así ocurre tomaremos (*fig.9.20*) los triángulos PRS, PSQ, PQR como las líneas que tienden a reducirse al entorno de P, con lo que se forma un cuarto triángulo QRS que, al disminuir los otros tres, también quedará en el entorno de P. Sean $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$ y $\vec{n}$ vectores unitarios normales a los planos de los triángulos considerados y C_1, C_2, C_3 y C las circulaciones a lo largo de los triángulos PRS, PSQ, PQR y QRS, respectivamente, con lo que el rotacional podrá escribirse, a partir de los tres primeros triángulos:

$$r\vec{o}t\,\vec{V} = \lim \left(\frac{C_1}{\Delta A_1}\vec{n}_1 + \frac{C_2}{\Delta A_2}\vec{n}_2 + \frac{C_3}{\Delta A_3}\vec{n}_3 \right) \qquad \textbf{(9.25)}$$

Comprobaremos que éste vector tiene como componente, según la normal $\vec{n}$ al triángulo QRS, el valor de dicha componente tal como se obtiene considerando la definición (9.24) aplicada a dicho triángulo. Efectivamente, multiplicando escalarmente (9.24) por $\vec{n}$, tendremos:

$$rot_n\vec{V} = \lim\left(\frac{C_1}{\Delta A_1}\cos\alpha_1 + \frac{C_2}{\Delta A_2}\cos\alpha_2 + \frac{C_3}{A_3}\cos\alpha_3\right) \qquad (9.26)$$

donde α_1, α_2, α_3 son los ángulos que forma $\vec{n}$ con las normales a los restantes triángulos, que coinciden con los ángulos de los planos que los contienen, de forma que, si ΔA es el área del triángulo QRS, se verifica: $\Delta A = \frac{\Delta A_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\Delta A_2}{\cos\alpha_2} = \frac{\Delta A_3}{\cos\alpha_3}$ pudiéndose escribir la (9.25) en la forma: $rot_n\vec{V} = \lim\frac{C_1+C_2+C_3}{\Delta A}$. Ahora bien, en la figura 9.20 se observa que, si recorremos los triángulos del triedro de forma que SQR resulte recorrido positivamente, los términos de circulación correspondientes a las aristas PQ, PR, PS se recorren dos veces en sentido opuesto, luego $C_1+C_2+C_3= C$, obteniéndose: $rot_n\vec{V} = \lim\frac{C}{\Delta A}$ que coincide con la definición *(9.24)* aplicada al QRS.

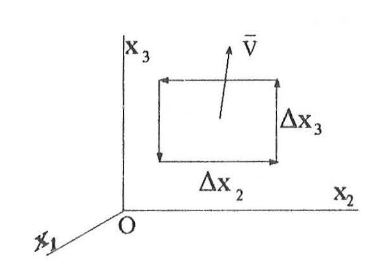


Figura 9.21

En consecuencia, $r\vec{o}t\ \vec{V}$ se comporta, efectivamente, como un vector cuya expresión en cartesianas podremos deducirla sin más que considerar la circulación de $\vec{V}$ según una línea de forma sencilla situada en (*fig.9.21*) cada uno de los tres planos coordenados (p. ej, el rectángulo de lados x_2, x_3 para el plano ox_2x_3 nos dará la componente según ox_1). Así, si $\vec{V}$ es el vector del campo en el punto central P, obtendremos para la circulación C_1, en una aproximación lineal para las Δx_i:

$$C_1 = \left(V_3 + \frac{\partial V_3}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{2}\right)\Delta x_3 - \left(V_2 + \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\frac{\Delta x_3}{2}\right)\Delta x_2 - \left(V_3 - \frac{\partial V_3}{\partial x_2}\frac{\Delta x_2}{2}\right)\Delta x_3 + \left(V_2 - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\frac{\Delta x_3}{2}\right)\Delta x_2 = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\Delta x_2\,\Delta x_3$$

por lo que, teniendo en cuenta que el área del rectángulo es $\Delta A=\Delta x_2\Delta x_3$ y aplicando la (*9.24*), se obtiene para componente del rotacional según ox_1:

$$rot_1\ \vec{V} = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}$$

Si consideramos ahora otros dos rectángulos centrados en P y en planos paralelos a los ox_1x_3 y ox_1x_2, obtendremos las otras dos componentes sin más que permutar los subíndices circularmente: $rot_2\ \vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}$ $rot_3\ \vec{V} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}$ resultando para expresión final del rotacional:

$$r\vec{o}t\ \vec{V} = \left(\frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3}\right)\vec{u}_1 + \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{\partial V_3}{\partial x_1}\right)\vec{u}_2 + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_2}\right)\vec{u}_3 \qquad (9.27)$$

que puede escribirse como un producto vectorial simbólico:

$$r\vec{o}t\ \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{V} \qquad (9.28)$$

9.6 CONCEPTO MATEMÁTICO DE GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL.

□ Si, como hemos visto, **TODO CAMPO ESCALAR U TIENE ASOCIADO UN CAMPO VECTORIAL** "*derivado*" de él (y no le llamamos así por casualidad):

$$U(xyz) \;\Rightarrow\; gradiente \;\Rightarrow\; \vec{V} = g\vec{r}ad\, U = \nabla U$$

nos surge la pregunta si se cumple también a la inversa; es decir, si todo campo vectorial es asociado de un campo escalar o, más exactamente, si todo campo vectorial deriva de un campo escalar. Una forma inmediata de comprobarlo es observar qué sucede con las componentes del campo vectorial ya que si efectuamos las segundas derivadas de las componentes de vector gradiente se igualan las derivadas cruzadas al no influir el orden de derivación de una función escalar, y al ser:

$$g\vec{r}ad\; U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = V_x(xyz)\vec{i} + V_y(xyz)\vec{j} + V_z(xyz)\vec{k} = \vec{V}$$

tendrá que cumplirse también la igualdad de las derivadas cruzadas entre las componentes del campo:

Teorema de Schwarz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \;\Rightarrow\; \frac{\partial V_z}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

y como esto no siempre se cumple para todo campo vectorial (véase un ejemplo cualquiera):

$$\vec{F} = x^2 z\,\vec{i} + yxz\,\vec{j} + e^{z^2}\vec{k} \;\Rightarrow\; \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \neq xy = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

podemos afirmar que **NO TODOS LOS CAMPOS VECTORIALES DERIVAN DE UN CAMPO ESCALAR.**

En consecuencia, distinguiremos a unos y otros denominando **CAMPOS CONSERVATIVOS** a los campos vectoriales que procedan de un campo escalar por aplicación del "operador" gradiente y **CAMPOS DISIPATIVOS**[1] a todos los demás (que, por supuesto serán muchos más).

□ Ya que no podemos afirmar que todo campo vectorial derive de un campo escalar, trataremos de averiguar si podemos asociar un campo escalar a otro vectorial. Haciendo uso del operador nabla $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, definido anteriormente para expresar el gradiente en forma abreviada -que no es otra cosa que un vector simbólico que opera como tal con lo que tiene a su izquierda y actúa exclusivamente sobre lo que tiene a su derecha efectuando las derivadas parciales correspondientes- y dado que el producto escalar de dos vectores es un escalar, **PODEMOS ASOCIAR A TODO CAMPO VECTORIAL UN CAMPO ESCALAR** procedente del producto escalar de dicho operador con el vector del campo, que denominaremos divergencia del campo vectorial:

---

(1) El por qué de dicha denominación lo comprenderemos al estudiar el trabajo de las fuerzas y la transformación de energía mecánica ya que si las fuerzas (vectores) no derivan de un campo escalar "disiparán" energía por rozamiento, calor ... mientras que si podemos encontrar un campo escalar asociado al campo de fuerzas, transformarán exclusivamente energía potencial en cinética y viceversa.

$$\vec{F} \quad \Rightarrow \textit{divergencia} \Rightarrow \quad \varphi(x\,y\,z)$$

de forma que

$$\varphi = \nabla \cdot \vec{F} = div\,\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}\right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (9.29)$$

Como hemos visto en §9.4 los campos (obviamente los $\vec{F}$) para los cuales $div\,\vec{F} = 0$ se denominan Solenoidales y serán muy importantes en el estudio de las deformaciones puesto que cuando lo sean no se producirán cambios de volumen.

Pero como ocurría con los conservativos, no todos los campos vectoriales serán solenoidales. Evidentemente no todo campo escalar deriva de un campo vectorial por aplicación de la divergencia o, al menos, no de uno solo, dado que podemos encontrar más de un conjunto de funciones escalares que sumadas nos den la que tenemos de partida y como además tendríamos que integrar los tres sumandos elegidos, surgirían otros tres parámetros adicionales reflejados en las constantes de integración respectivas. Es decir, encontraríamos infinitos campos vectoriales que lo cumplirían y por tanto no merece la pena estudiarlos. Lo interesante es lo particular; la notabilidad es que no haya divergencia, no que sí la haya.

Que sea conservativo el campo vectorial no implica que sea solenoidal, aunque puede darse el caso que un campo vectorial sea simultáneamente conservativo y solenoidal.

□ Intentaremos ahora asociar un campo vectorial a otro vectorial, aunque de todas las posibilidades existentes solo mencionaremos una que tiene interés por las aplicaciones que va a tener en nuestro ámbito de estudio. Y siguiendo con el juego matemático que nos proporciona el operador nabla **PODEMOS ASOCIAR AL CAMPO VECTORIAL DADO OTRO CAMPO VECTORIAL** resultante de multiplicar vectorialmente dicho operador con él, basándonos en que han aparecido magnitudes en la Física que tienen un comportamiento similar al que describe el vector del campo resultante que denominaremos rotacional:

$$\vec{F} \quad \Rightarrow \textit{rotacional} \Rightarrow \quad \vec{W}$$

de forma que:

$$\vec{W} = \nabla \times \vec{F} = r\vec{o}t\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

entendiendo que las "multiplicaciones" se leen "derivadas".

Ahora bien, dado un campo vectorial $\vec{W}$, por lo mismo que en el caso del campo de gradientes, aunque la demostración es más compleja, NO siempre podemos decir que deriva de la aplicación del rotacional a otro campo vectorial. Sin embargo hay una particularidad que merece destacar si tenemos un campo vectorial $\vec{F}$ cuyo rotacional sea nulo $rot\,\vec{F} = 0$ en todos los puntos, en cuyo caso llamaremos ***irrotacional***, y es que al ser nulas las componentes del vector rotacional tendremos:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \;; \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \;; \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}$$

particularidad que ya habíamos visto con anterioridad en el caso de los Campos Conservativos, por lo que podemos afirmar que ***TODO CAMPO IRROTACIONAL ES CONSERVATIVO Y VICEVERSA***. Su interés será patente en el estudio de fluidos ya que si el campo de velocidades de las partículas es irrotacional veremos que éstas se van a trasladar exclusivamente, sin producirse giros (remolinos).

□ Nos queda, por último, averiguar cómo se puede pasar de un campo escalar a otro escalar, pero ya resulta obvio con lo visto hasta ahora, ya que si:

$$U(x\,y\,z) \;\Rightarrow\; gradiente \;\Rightarrow\; \vec{F} \qquad \text{y} \qquad \vec{F} \;\Rightarrow\; divergencia \;\Rightarrow\; \varphi(x\,y\,z)$$

con ambas operaciones simultáneas tendremos:

$$U(x\,y\,z) \;\Rightarrow\; divergencia\ del\ gradiente \;\Rightarrow\; \varphi(x\,y\,z)$$

cuya expresión resultante será:

$$\nabla\cdot(\nabla U) = \nabla^2 U = div\,\vec{grad}\;U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \varphi(x\,y\,z) \qquad (9.31)$$

conocida como Laplaciana de U, que nos conducirá a la expresión de la transmisión del calor o a la de la membrana en Estructuras.

Si $div\,(\vec{grad}\,U) = 0$ significa que el campo vectorial $\vec{V}^* = \vec{grad}\;U^*$ es SOLENOIDAL y como deriva de una función original U* por aplicación del gradiente, es al mismo tiempo CONSERVATIVO, por lo que a dicha función original se la denomina ***FUNCIÓN ARMÓNICA*** (que descubriremos en la Función de tensión o de Airy).

9.7 TEOREMA DE GAUSS Y FÓRMULA DE STOKES

Consideremos ahora una superficie cerrada A (*fig. 9.22*) y dividamos el volumen que encierra en pequeños elementos $\Delta\tau$, a cada uno de los cuales podremos aplicar la definición (*9.18*) en la forma:

$$\lim_{\Delta\tau\to 0} div\;\vec{V}\cdot\Delta\tau = \Sigma\,\vec{V}_i\cdot\Delta\vec{A}_i \qquad (9.32)$$

Está claro que, si sumamos para todos ellos en el límite, el primer miembro nos dará la integral, extendida a todo el volumen, de $div\;\vec{V}$. En cuanto al segundo miembro, debe observarse que, al sumar sobre las caras comunes a dos volúmenes elementales contiguos, para cada uno de ellos será normal exterior lo que para el otro es interior, anulándose dos a dos todos los términos salvo los de las caras que componen la superficie exterior dada que encierra el volumen total.

Figura 9.22

El resultado pues será, en el límite, la integral del flujo del vector $\vec{V}$ a través de la superficie A, obteniéndose, en definitiva:

$$\iiint div\;\vec{V}\cdot d\tau = \oint\!\!\oint \vec{V}\cdot d\vec{A} = \varphi \qquad (9.33)$$

fórmula de gran importancia, al relacionar una integral doble con otra triple, que es conocida como **"fórmula de Gauss"**. Esta fórmula podría admitirse sin necesidad de la demostración indicada pues equivale, conceptualmente, a igualar el número de líneas de campo que nacen en el volumen (primer miembro) y la diferencia entre las que salen y entran (segundo).

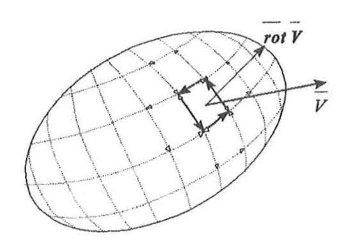


Figura 9.23

Mediante un razonamiento análogo al utilizado para la obtención de la fórmula anterior, podemos imaginar una superficie que se apoye en una línea cualquiera y descomponerla *(fig.9.23)* en elementos de superficie, a cada uno de los cuales resultará aplicable la expresión *(9.24)* en la forma:

$$\lim_{\Delta A \to 0} rot_n \vec{V}\ \Delta A = \lim_{\Delta A \to 0} r\vec{o}t\ \vec{V} \cdot \Delta\vec{A} = \lim_{\Delta \vec{r}_i \to 0} \Sigma\ \vec{V}_i \cdot \Delta\vec{r}_i \qquad (9.34)$$

donde se observa que, para una superficie y su contorno que tiendan a cero, el flujo del rotacional a través de la superficie coincide con la circulación del vector a lo largo de su contorno.

Al sumar para todos los elementos de superficie, en el límite, el primer miembro se transformará en el flujo del rotacional de $\vec{V}$ a través de la superficie total, $\iint r\vec{o}t\ \vec{V} \cdot d\vec{A}$; en cuanto al segundo miembro, será necesario realizar la suma para los contornos de los elementos de superficie, pero, como todas las líneas interiores serían recorridas dos veces en sentidos opuestos, las circulaciones correspondientes se anularían en la suma, quedando como resultado de ésta, únicamente, la circulación a lo largo de la línea contorno de la superficie total. Obteniendo así la importante "**fórmula de Stokes**":

$$\iint r\vec{o}t\ \vec{V} \cdot d\vec{A} = \oint \vec{V} \cdot d\vec{r} \qquad (9.35)$$

Figura 9.24

Dado que la circulación del vector $\vec{V}$ a lo largo de una línea determinada tendrá también un valor determinado, el flujo de su rotacional será el mismo para todas las superficies que se apoyan en ella. Dos cualesquiera de estas superficies constituirán una superficie cerrada (*fig.9.24*), por lo que, estando dirigido el sentido positivo de la normal de acuerdo con el de recorrido de la línea, el flujo de los rotacionales será el mismo a través de una y otra superficie. Sin embargo, considerándolas como una sola superficie cerrada, el signo positivo de la normal y de los vectores $d\vec{A}$ corresponde a la normal exterior, por lo que debemos invertir el sentido de la normal de una de las dos superficies.

Esto significa que el flujo del rotacional será igual y de signo opuesto para una de las dos superficies. En consecuencia, el flujo a través de una superficie cerrada de un vector que puede expresarse en la forma $\vec{W} = r\vec{o}t\ \vec{V}$ debe ser nulo, con lo que, apoyándonos en la fórmula de Gauss (*9.33*), podemos escribir: $\oint\!\!\oint r\vec{o}t\ \vec{V} \cdot d\vec{A} = \iiint div\ (r\vec{o}t\ \vec{V})\, d\tau = 0$ y, como esto debe ocurrir para cualquier superficie cerrada, tendría que verificarse, de modo general, que $div\,(\,r\vec{o}t\ \vec{V}) = 0$ es decir, el rotacional de un campo vectorial es siempre un vector solenoidal. Por otra parte, si el rotacional de un vector es nulo en todos los puntos del campo (campo irrotacional o conservativo), se verificará, por la (*9.35*), $\oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0$, lo que prueba que el integrando es la diferencial exacta de una función $dU = g\vec{r}ad\ U \cdot d\vec{r}$, es decir $\vec{V} = g\vec{r}ad\ U$, por lo que $r\vec{o}t\,(\,g\vec{r}ad\ U\,) = 0$ y el campo $\vec{V}$ será conservativo.

En resumen, las propiedades de los campos vectoriales *IRROTACIONALES* son:

1° Su rotacional es cero: $r\vec{o}t\ \vec{V} = 0$

2° Su circulación a lo largo de una curva cerrada es nula $\oint \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0$

3° Son gradiente de una función escalar: $\vec{V} = g\vec{r}ad\ U$

Y las de los campos vectoriales *SOLENOIDALES* son:

1° Su divergencia es nula: $div\ \vec{V} = 0$

2° Su flujo a través de una superficie cerrada es cero. $\oint\!\!\oint \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$

3° Son el rotacional de una función vectorial: $\vec{V} = r\vec{o}t\ \vec{W}$

CAMPOS TENSORIALES Y CÁLCULO TENSORIAL

10.1 OTRO CONCEPTO DE CAMPO

En el estudio de determinados fenómenos, como la transmisión de acciones en un medio continuo natural es decir, más o menos deformable, nos vamos a encontrar con algunas magnitudes direccionales cuyos valores vendrán dados, entre otras variables, en función de una dirección normal al plano o superficie a considerar. Sin ir más lejos, para no entrar en materia de otros cursos, en la mecánica del sólido rígido tendremos que relacionar el momento de las fuerzas actuantes con la variación del momento cinético mediante un operador indicativo de la distribución de la masa en función de la dirección del eje instantáneo de rotación.

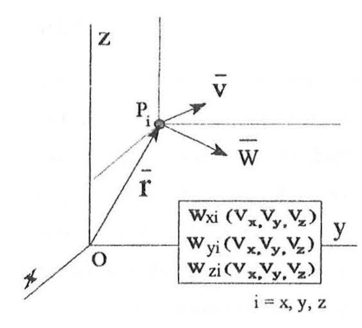


Figura 10.1

Nos encontramos, por tanto, con otro concepto de campo de un orden superior al que responderán estas "funciones" cuya característica común va a ser que a cada punto del espacio geométrico no le va a estar asignado un único valor, como en los campos escalar y vectorial, sino que le podrán corresponder ∞ valores, de los que se adoptarán en cada caso solo uno en función de otra variable adicional que va a ser una dirección definida por un vector. Es decir, las magnitudes asociadas en estos campos "*a cada punto*" dependerán, en general, además del tiempo ***t*** y de la posición $\vec{r}$ del punto como en los anteriores, de otro vector $\vec{v}$, indicativo de las posibles orientaciones a considerar en el entorno de aquél.

En otras palabras, podríamos decir que el vector $\vec{w}$ obtenido en estas "transformaciones" tendrá unas componentes que diferirán, no solo en función del punto considerado en el espacio geométrico ordinario, sino también en función de las componentes del vector $\vec{v}$ relativo a una dirección variable, $\vec{w} = \vec{w}(\vec{v}, \vec{r}, t)$, lo que podríamos representar, *para cada posición*, mediante tres funciones $w_x = f_1(v_x, v_y, v_z)$, $w_y = f_2(v_x, v_y, v_z)$ y $w_z = f_3(v_x, v_y, v_z)$, de forma que si dichas funciones son ***lineales***, es decir expresables mediante una combinación lineal de las v_i por unos valores escalares T_{ij}:

$$\begin{aligned} w_1 &= T_{11}v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3 \\ w_2 &= T_{21}v_1 + T_{22}v_2 + T_{23}v_3 \\ w_3 &= T_{31}v_1 + T_{32}v_2 + T_{33}v_3 \end{aligned} \qquad \textit{(10.1)}$$

lo podríamos reducir a una notación compacta, $w_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}v_j$ o simplemente $w_i = T_{ij}v_j$ (notación de Einstein), aunque también resulta útil la notación matricial, entendiéndose cada componente del vector transformado $\vec{w}$ como suma de los productos entre los elementos de cada fila de la matriz del tensor por los del mismo subíndice en la columna de las componentes del vector $\vec{v}$, es decir:

$$\begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} \qquad \textit{(10.2)}$$

expresable simbólicamente mediante la notación matricial reducida $|w| = \|T\| \, |v|$ o bien mediante la notación vectorial $\vec{w} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{v}$, en la que se adopta la misma simbología del producto escalar por similitud.

En principio, como se trata de aproximarnos a los fenómenos reales, la mayoría de las veces de forma empírica, se parte de una función lineal. Bastaría, por tanto, conocer los transformados de tres vectores aplicados en el mismo punto para determinar las componentes del tensor y si los resultados obtenidos aplicados a un cuarto vector se aproximan a la realidad diremos entonces que el fenómeno que representan es un ***fenómeno lineal*** (ya que si los T_{ij} fueran a su vez función de v_1, v_2 y v_3 la cosa se complicaría aún más y el tensor ya no sería lineal).

En consecuencia se tendrán $3^2 = 9$ incógnitas (las componentes T_{ij}) para definir un tensor de este tipo, a diferencia de las $3^1 = 3$ incógnitas necesarias para definir un vector o de las $3^0 = 1$ necesarias para definir un escalar, siendo el 3 indicativo de la base trirrectangular elegida. Podríamos decir, por tanto, que los tensores que estudiaremos serán operadores lineales de orden 2 que transformarán un vector en otro de dirección distinta, por lo general, al anterior y los representaremos con dos líneas encima de la letra representativa de la magnitud $\overline{\overline{T}}$ de modo análogo a la representación vectorial $\overline{V}$ que entenderemos como operador o tensor de orden 1 y a la representación escalar U, entendida a su vez, como operador o tensor de orden 0.

El conjunto de los 3^2=9 valores (escalares) T_{ij} que definirán el operador en un punto P, cada uno con un significado particular correspondiente a la magnitud física en cuestión, lo podemos denominar **TENSOR** del campo asociado a P y se entenderá que el vector origen y el transformado por él tendrán el mismo punto de aplicación. Por tanto el conjunto de los tensores asociados a cada uno de los puntos del espacio definirán un **CAMPO TENSORIAL** que estará constituido por 3^2=9 funciones que, por analogía con las definiciones de los otros campos, expresaremos como función *TENSORIAL* de variable vectorial, $\overline{\overline{T}} = \overline{\overline{T}}(\vec{r},t)$.

Tendremos, por tanto, definido un CAMPO TENSORIAL en un espacio geométrico ordinario cuando a cada punto, en cada instante, le corresponda un tensor determinado analíticamente mediante nueve funciones escalares del parámetro tiempo y de su localización geométrica en el espacio de referencia, mediante el cual a cada vector aplicado en él le corresponderá un único vector de dirección de dirección distinta por lo general.

Y generalizando se entenderá por **CAMPO TENSORIAL** de orden ***n*** el conjunto de las *3^n* funciones necesarias para definirlo en su totalidad:.

$3^0 = 1$	⇨	*campo tensorial de orden 0*	*ESCALAR*
$3^1 = 3$	⇨	*campo tensorial de orden 1*	*VECTORIAL*
$3^2 = 9$	⇨	*campo tensorial de orden 2*	*TENSORIAL*

10.2 EL TENSOR DE ENTORNO COMO CAMPO.

Como ya quedó indicado al estudiar el gradiente de un campo escalar, el resultado resulta totalmente distinto cuando tratamos de averiguar la variación de un campo vectorial en el entorno de los puntos debido a que cada una de las componentes del vector de campo es una función escalar.

Recordaremos que a todo campo escalar se le podía asociar otro vectorial denominado campo de gradientes ya que a cada punto del espacio le correspondía una dirección de máxima variación del campo escalar en el entorno del punto, representada por la del vector gradiente en esa posición de forma que $dU = \vec{grad}\,U \cdot d\vec{r} = \vec{V} \cdot d\vec{r}$.

Vamos a ver ahora que para indicar la variación del vector de campo en el entorno del punto geométrico necesitamos "ascender" a todo un orden $d\vec{V} = \vec{grad}\,\vec{V} \cdot d\vec{r} = \overline{\overline{H}} \cdot d\vec{r}$ por lo que recurriremos a la notación tensorial para ascender el orden del vector.

Como en el caso de los campos escalares y vectoriales, en general, supondremos que todas las funciones que intervienen en los campos tensoriales son continuas, derivables y uniformes, o lo que es lo mismo, le corresponde un sólo valor de cada función a cada punto del espacio, aunque la relación no será biunívoca pudiendo tener varios puntos un mismo valor para cada componente del tensor. Recurriendo, por tanto, al desarrollo en serie de la función vectorial $\Delta\vec{V} = d\vec{V} + \frac{1}{2!}d^2\vec{V} + \ldots + \frac{1}{n!}d^n\vec{V}$ y despreciando igualmente infinitésimos de orden superior tendremos:

$$d\vec{V} = d\left[V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right] = \left|\frac{\partial V_x}{\partial x}dx + \frac{\partial V_x}{\partial y}dy + \frac{\partial V_x}{\partial z}dz\right|\vec{i} + \left|\frac{\partial V_y}{\partial x}dx + \frac{\partial V_y}{\partial y}dy + \frac{\partial V_y}{\partial z}dz\right|\vec{j} + \left|\frac{\partial V_z}{\partial x}dx + \frac{\partial V_z}{\partial y}dy + \frac{\partial V_z}{\partial z}dz\right|\vec{k}$$

que agrupando en la forma:

$$d\vec{V} = \left|\frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\vec{k}\right|dx + \left|\frac{\partial V_x}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\vec{k}\right|dy + \left|\frac{\partial V_x}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\vec{k}\right|dz =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left|V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right|dx + \frac{\partial}{\partial y}\left|V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right|dy + \frac{\partial}{\partial z}\left|V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}\right|dz =$$

$$= \frac{\partial\vec{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}dz = \left[\frac{\partial\vec{V}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial z}\vec{k}\right]\cdot\left[dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right] = g\vec{r}ad\vec{V}\cdot d\vec{r}$$

nos permite, en efecto, expresar la variación del vector del campo como "***producto escalar***" del "*GRADIENTE DEL CAMPO VECTORIAL*" en cada posición por el ***vector desplazamiento*** indicativo de cada dirección, o bien como un vector que tiene por componentes los productos escalares de los gradientes de las componentes del campo vectorial por el vector desplazamiento:

$$d\vec{V} = \left[\frac{\partial V_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\vec{k}\right]\cdot\left[dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\,\vec{k}\right]\vec{i} +$$

$$+ \left[\frac{\partial V_y}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\vec{k}\right]\cdot\left[dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\,\vec{k}\right]\vec{j} +$$

$$+ \left[\frac{\partial V_z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V_z}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\vec{k}\right]\cdot\left[dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\,\vec{k}\right]\vec{k} =$$

$$= \left[g\vec{r}ad\,V_x\cdot d\vec{r}\right]\vec{i} + \left[g\vec{r}ad\,V_y\cdot d\vec{r}\right]\vec{j} + \left[g\vec{r}ad\,V_z\cdot d\vec{r}\right]\vec{k} = g\vec{r}ad\,\vec{V}\cdot d\vec{r}$$

y que no es otra cosa que el producto escalar de un tensor por el vector desplazamiento expresable más adecuadamente mediante la notación tensorial:

$$d\vec{V} = \left\|\begin{matrix}\frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} & \frac{\partial V_x}{\partial z}\\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z}\\ \frac{\partial V_z}{\partial x} & \frac{\partial V_z}{\partial y} & \frac{\partial V_z}{\partial z}\end{matrix}\right\| \cdot \left|\begin{matrix}dx\\ dy\\ dz\end{matrix}\right| = g\vec{r}ad\,\vec{V}\cdot d\vec{r} = \overline{\overline{H}}\cdot d\vec{r} \qquad \textbf{(10.3)}$$

es decir, nuestro "*vector*" gradiente de un campo vectorial tendría 9 componentes a diferencia de las 3 del gradiente de un campo escalar, por lo que no se trataría de un vector sino de un tensor, como queríamos demostrar, que se denomina *TENSOR DE ENTORNO* ya que en una primera aproximación todos los fenómenos pueden considerarse *lineales* en este ámbito.

En este sentido, si consideramos el gradiente del propio vector de posición $\vec{r}$ obtendremos un tensor de particular relevancia por tener nulos todos sus términos salvo los de la diagonal principal::

$$\nabla\vec{r} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \delta \qquad (10.4)$$

denominado Tensor de Krönecker o tensor unidad.

10.3 OPERACIONES ENTRE TENSORES

Antes de seguir avanzando en el conocimiento de los tensores necesitamos previamente familiarizarnos con la estructura y la notación tensorial, para lo cual tenemos que definir las operaciones que admite este operador.

SUMA ALGEBRAICA

Se entenderá que solo se podrá efectuar la suma algebraica entre tensores del mismo orden (cero, uno o dos) dado que, en una base determinada, cada componente del tensor suma será la suma de las componentes de igual subíndice de los tensores sumados: $S_{ij} = T_{ij} \pm H_{ij}$ y se expresará como:

$$\overline{\overline{T}} \pm \overline{\overline{H}} = \overline{\overline{S}} \qquad (10.5)$$

Por el contrario, los productos entre tensores no imponen esa condición, pudiéndose efectuar entre tensores de diferente orden; es decir de orden cero (escalar), uno (vector) o dos (propiamente tensor).

Distinguiremos entre dos tipos de productos ya que la diferencia fundamental entre ambos será que en unos (productos Internos) el orden del tensor resultante será la resta de los órdenes respectivos, mientras que en los otros (productos externos) el orden resultante será la suma de órdenes, para lo que resulta útil visualizar las rayas que indican el de cada tensor[1]:

PRODUCTO INTERNO O CONTRAÍDO

Este producto se obtiene por igualación de subíndices y suma entre los componentes de cada tensor, obteniéndose un tensor de orden resta el de los otros dos. Es el que sirvió de base para definir la transformada de un vector mediante un tensor, pero también lo es el propio producto escalar:

$$\overline{V}\cdot\overline{W} = U \quad \Rightarrow \quad U = V_i W_i \quad \Rightarrow \quad |\, V_1 \; V_2 \; V_3 \,| \cdot \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{vmatrix} = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3 \qquad (10.6)$$

---

(1) *Es de notar que el producto de dos escalares (tensores de orden cero) es tanto interno como externo ya que (0 + 0 = 0 - 0 = 0) al igual que el de un es calar por un vector (1 + 0 = 1 - 0 = 1) y el de un escalar por un tensor (2 + 0 = 2 - 0 = 2).*

$$\overline{\overline{T}}\cdot\overline{V}=\overline{W} \quad \Rightarrow \quad W_i=T_{ij}V_j \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T_{11}V_1+T_{12}V_2+T_{13}V_3 \\ T_{21}V_1+T_{22}V_2+T_{23}V_3 \\ T_{31}V_1+T_{32}V_2+T_{33}V_3 \end{vmatrix} \qquad (10.7)$$

$$\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{\varepsilon}}=E \quad \Rightarrow \quad E=\tau_{ij}\varepsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad \begin{Vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{Vmatrix} : \begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{Vmatrix} = \begin{matrix} \tau_{11}\varepsilon_{11}+\tau_{12}\varepsilon_{12}+\tau_{13}\varepsilon_{13}+ \\ +\tau_{21}\varepsilon_{21}+\tau_{22}\varepsilon_{22}+\tau_{23}\varepsilon_{23}+ \\ +\tau_{31}\varepsilon_{31}+\tau_{32}\varepsilon_{32}+\tau_{33}\varepsilon_{33} \end{matrix} \qquad (10.8)$$

Utilizándose en este último caso el punto doble punto por entenderse como una doble contracción.

PRODUCTO EXTERNO O TENSORIAL

Se define como un tensor de orden suma cuyas componentes son el producto de todas las componentes de uno por todas las del otro, que expresaremos en notación compacta por:

$$\overline{\overline{T}} \oplus \overline{V} = \overline{\overline{\overline{P}}} \quad \Rightarrow \quad T_{ij}V_k = P_{ijk} \qquad (10.9)$$

$$\overline{V} \oplus \overline{H} = \overline{\overline{P}} \quad \Rightarrow \quad V_iH_j = P_{ij} \qquad (10.10)$$

siendo el primero un tensor de orden 3 que requeriría una representación en 3 dimensiones, mientras que el segundo, denominado *PRODUCTO DIÁDICO* de dos vectores resulta, efectivamente, un tensor.

10.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA: CUÁDRICA TENSORIAL.

A diferencia de los otros campos estudiados, no podemos encontrar una representación gráfica que permita visualizar globalmente la distribución de un campo tensorial por la dificultad que entraña el orden superior.

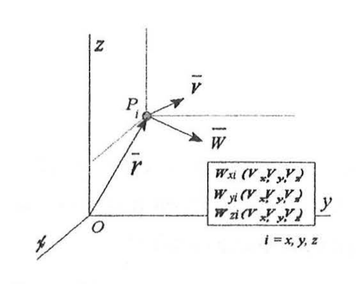


Figura 10.2

Sin embargo, podríamos interpretar este orden 2 como un campo dentro de otro campo ya que a cada posición en el espacio geométrico ordinario (variable posicional $\vec{r}$) se le asigna otro campo de variable direccional de forma que estudiaremos primero cómo representar el tensor en un punto arbitrario para discutir posteriormente cómo se visualizaría el campo tensorial.

Supondremos, por tanto, el tensor $\overline{\overline{T}}$ (referido a un sistema de ejes x_i) asociado a un punto arbitrario que adoptaremos como origen de referencia dado que el vector transformado por el tensor tendrá el mismo punto de aplicación que el vector original.

Como se trata de encontrar una expresión analítica que identifique el tensor en cada punto, lo que estamos buscando es una relación entre el vector origen y el transformado o lo que es igual, una relación entre las coordenadas de los extremos de ambos vectores, por lo que elegiremos como vector origen el propio vector de posición $\vec{r}$ de ese punto P que representa el extremo de cualquier vector de forma que el transformado por el tensor será $\vec{r}' = \overline{\overline{T}}\cdot\vec{r}$ y sus componentes se podrán expresar como $x_i' = T_{ij}x_j$.

Es de notar que el producto escalar de ambos vectores será un invariante ya que no dependerá del sistema de referencia elegido para su representación y por tanto, aunque cambien las componentes del tensor, como veremos en su momento, no lo hará cualquier magnitud escalar.

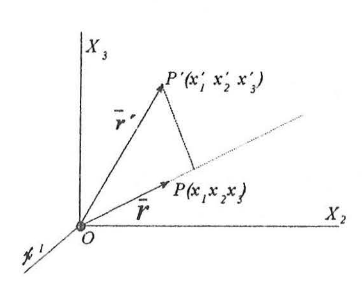


Figura 10.3

En consecuencia, parece adecuado intentar representar espacialmente el tensor mediante uno de esos invariantes de forma que si buscamos ***el lugar geométrico de los puntos para los cuales el producto escalar de su vector de posición por el transformado mediante el tensor asociado al origen den un mismo valor*** nos encontraremos con la expresión:

$$\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = \vec{r}\cdot\overline{\overline{T}}\cdot\vec{r} = x_i\,x_i' = x_i\,T_{ij}\,x_j = q \qquad \textit{(10.11)}$$

que desarrollada quedará:

$$q = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{11}x_1+T_{12}x_2+T_{13}x_3 \\ T_{21}x_1+T_{22}x_2+T_{23}x_3 \\ T_{31}x_1+T_{32}x_2+T_{33}x_3 \end{vmatrix} = T_{11}x_1^2+T_{22}x_2^2+T_{33}x_3^2+T_{12}x_2x_1+T_{13}x_3x_1+T_{21}x_1x_2+T_{23}x_3x_2+T_{31}x_1x_3+T_{32}x_2x_3$$

y en el caso de tensores simétricos, para los que $T_{ij} = T_{ji}$ (serán los que nos vamos a encontrar en nuestro estudio) la expresión obtenida se podrá simplificar en la forma:

$$q = T_{11}x_1^2 + T_{22}x_2^2 + T_{33}x_3^2 + 2\,T_{12}x_2x_1 + 2\,T_{23}x_2x_3 + 2\,T_{13}x_3x_1 \qquad \textit{(10.12)}$$

ecuación de una cuádrica que, por tener como coeficientes los términos T_{ij} del tensor, recibe el nombre de ***CUÁDRICA TENSORIAL*** o forma cuadrática asociada al tensor y que corresponderá a un ***elipsoide***, a un ***hiperboloide de una hoja*** o de ***dos hojas*** en función de los signos de los términos de la diagonal principal del tensor.

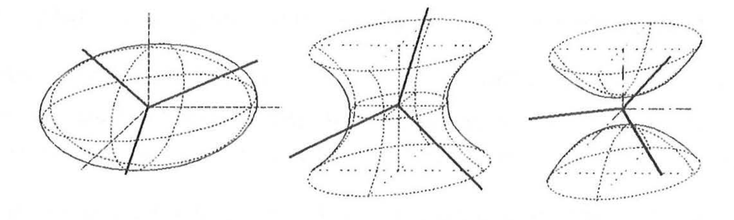


Figura 10.4

Como es de esperar, cuando los ejes de referencia coincidan con los ejes geométricos de las cuádricas, que denominaremos ***direcciones principales del tensor***, la (*10.12*) podrá tener una expresión reducida en la forma:

$$q = T_{11}^{o}x_1^{\,2} + T_{22}^{o}x_2^{\,2} + T_{33}^{o}x_3^{\,2} = 1 \qquad \textit{(10.13)}$$

al anularse los términos del tensor de subíndices diferentes y como el vector transformado será el mismo independientemente de los ejes de referencia adoptados, tanto el tensor asociado al punto como la cuádrica asociada al tensor serán únicos, variando exclusivamente su expresión.

En consecuencia, generalizando a todo el espacio geométrico, la representación gráfica de un campo tensorial sería el conjunto de todas las cuádricas asociadas a cada punto del espacio, si bien solo tendrá utilidad la representación de algunas en particular, como veremos al estudiar el campo de tensores de inercia de un sistema material rígido, en especial las asociadas a los puntos de los ejes principales de la cuádrica correspondiente que, para nosotros, serán siempre elipsoides, denominados elipsoides de inercia del sistema material.

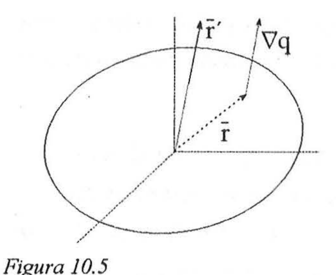


Figura 10.5

Una de las ventajas inmediatas de la cuádrica tensorial se deduce fácilmente a partir de la expresión reducida *(10.13)* ya que el gradiente de la función q , normal a la cuádrica en cada punto de su superficie, como vimos en el tema anterior, tendrá precisamente la dirección del transformado del vector de posición del punto correspondiente:

$$\nabla q = 2T_{11}^{o}x_1\vec{u}_1 + 2T_{22}^{o}x_2\vec{u}_2 + 2T_{33}^{o}x_3\vec{u}_3 = 2\vec{r}^{\,\prime} \qquad (10.14)$$

En efecto, si se han anulado los T_{ij} de diferentes subíndices, los ejes de referencia serán precisamente los ejes principales y el tensor habrá adoptado la forma diagonal por lo que el transformado de $\vec{r}$ será:

$$\vec{r}^{\,\prime} = x_1^{\prime}\vec{u}_1 + x_2^{\prime}\vec{u}_2 + x_3^{\prime}\vec{u}_3 = \begin{Vmatrix} T_{11}^{o} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22}^{o} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33}^{o} \end{Vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = T_{11}^{o}x_1\vec{u}_1 + T_{22}^{o}x_2\vec{u}_2 + T_{33}^{o}x_3\vec{u}_3 \qquad (10.15)$$

lo que permitiría, mediante una construcción gráfica y el cálculo de su módulo según la expresión $r^{\prime} = \frac{q}{r\cos\alpha}$, determinar completamente cualquier transformado por el tensor, si bien su aplicación solo será práctica en el caso de tensores planos o mediante auxilio del ordenador.

10.5 DIRECCIONES PRINCIPALES Y VALORES PROPIOS DEL TENSOR.

Como ya hemos intuido, si se eligen adecuadamente los ejes de referencia, la cuádrica asociada al tensor podrá tener una expresión reducida de forma que se anularán las componentes del tensor T_{ij} de subíndices no repetidos $i \neq j$ quedando exclusivamente los elementos de la diagonal principal que habrán modificado su valor.

La propia expresión del vector transformado por el tensor en su forma diagonalizada *(10.15)* nos permite dar una nueva definición de TENSOR como un "***operador lineal que transforma cualquier vector multiplicando cada una de sus proyecciones sobre unas DIRECCIONES PRINCIPALES por un VALOR PROPIO de cada dirección***".

Por tanto, a partir de esta definición, se deduce que cualquier vector situado sobre una de las *Direcciones Principales* del tensor, no modificará su dirección en la transformación, mientras que su módulo se verá afectado por el correspondiente *Valor Propio* o autovalor.

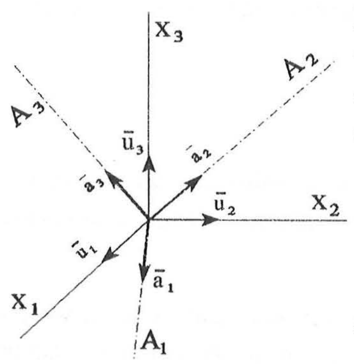


Figura 10.6

Denominando $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ los unitarios según esas direcciones y A_1, A_2, A_3 los valores asociados respectivamente a cada dirección, la característica mencionada equivale a decir que el transformado de los propios unitarios se podrá expresar como:

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^{\,\prime} &= \overline{\overline{T}} \cdot \vec{a}_1 = A_1\,\vec{a}_1 \\ \vec{a}_2^{\,\prime} &= \overline{\overline{T}} \cdot \vec{a}_2 = A_2\,\vec{a}_2 \\ \vec{a}_3^{\,\prime} &= \overline{\overline{T}} \cdot \vec{a}_3 = A_i\,\vec{a}_3 \end{aligned} \qquad (10.16)$$

de forma que la expresión del transformado de un vector referido a esa base $\vec{v} = v_1^{o}\vec{a}_1 + v_2^{o}\vec{a}_2 + v_3^{o}\vec{a}_3$ quedará:

$$\vec{w} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{v} = \overline{\overline{T}} \cdot [v_1^{o}\vec{a}_1 + v_2^{o}\vec{a}_2 + v_3^{o}\vec{a}_3] = v_1^{o}\,\overline{\overline{T}} \cdot \vec{a}_1 + v_2^{o}\,\overline{\overline{T}} \cdot \vec{a}_2 + v_3^{o}\,\overline{\overline{T}} \cdot \vec{a}_3 = v_1^{o}A_1\vec{a}_1 + v_2^{o}A_2\vec{a}_2 + v_3^{o}A_3\vec{a}_3 \qquad (10.17)$$

Si la base principal es ortogonal podemos expresar las componentes del vector referido a ella como producto escalar del vector por el unitario correspondiente: $v_i^o = \vec{v} \cdot \vec{a}_i = v_j^o\, \vec{a}_j \cdot \vec{a}_i$ y, análogamente, si ***la base arbitraria también*** lo es, los versores de las direcciones principales se podrán expresar en función de los cosenos directores relativos a ella: $\vec{a}_i = \alpha_{ij}\,\vec{u}_j$ de donde $v_i^o = \vec{v} \cdot \vec{a}_i = v_j\,\vec{u}_j \cdot \alpha_{ij}\,\vec{u}_j = \alpha_{ij}\,v_j$ y sustituyendo en la *(10.17)*:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= A_1\, v_1^o\, \vec{a}_1 + A_2\, v_2^o\, \vec{a}_2 + A_3\, v_3^o\, \vec{a}_3 = \\ &= A_1 v_j \alpha_{1j} \alpha_{1i}\, \vec{u}_i + A_2 v_j \alpha_{2j} \alpha_{2i}\, \vec{u}_i + A_3 v_j \alpha_{3j} \alpha_{3i}\, \vec{u}_i = \\ &= A_1\, \alpha_{1i} \alpha_{1j}\, v_j \vec{u}_i + A_2\, \alpha_{2i} \alpha_{2j}\, v_j \vec{u}_i + A_3\, \alpha_{3i} \alpha_{3j}\, v_j \vec{u}_i = \\ &= [A_1\, \alpha_{1i} \alpha_{1j} + A_2\, \alpha_{2i} \alpha_{2j} + A_3\, \alpha_{3i} \alpha_{3j}]\, v_j \vec{u}_i = w_i\, \vec{u}_i \end{aligned} \qquad \textbf{(10.18)}$$

de donde se deduce que $w_i = [A_1\, \alpha_{1i}\alpha_{1j} + A_2\, \alpha_{2i}\alpha_{2j} + A_3\, \alpha_{3i}\alpha_{3j}]\, v_j$ y al mismo tiempo $w_i = T_{ij}\, v_j$, lo que nos permite expresar las componentes del tensor en una base cualquiera en función de los valores propios y los cosenos directores de los ejes principales del tensor con los ejes de la base elegida y la igualdad de los términos simétricos respecto a la diagonal principal:

$$T_{ij} = A_1\, \alpha_{1i} \alpha_{1j} + A_2\, \alpha_{2i} \alpha_{2j} + A_3\, \alpha_{3i} \alpha_{3j} = T_{ji} \qquad \textbf{(10.19)}$$

quedando condicionada la **SIMETRÍA** del **TENSOR** a la ortogonalidad de la base de referencia y de la Principal.

Las 9 incógnitas de un tensor general se reducen, por tanto, en un tensor simétrico, a 6 , equivalente al conocimiento de los 3 valores propios, 2 cosenos directores de una de las direcciones principales y 1 coseno director de cualquier otra dirección ya que al ser ortogonal la base de referencia, la suma de los cuadrados de los cosenos directores del primer versor dará la unidad: $\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1$ y al ser también ortogonal la base principal, el producto escalar de dos de ellas será nulo, proporcionando la ecuación $\alpha_{11}\,\alpha_{21} + \alpha_{12}\,\alpha_{22} + \alpha_{13}\,\alpha_{23} = 0$, y la tercera se obtendrá como producto vectorial de las otras dos.

10.6 DIAGONALIZACIÓN DEL TENSOR - INVARIANTES.

Como ya hemos visto, el tensor es único para cada punto del espacio pero, al igual que los vectores, en función del sistema de referencia elegido así adoptará su expresión. Para obtener la forma diagonalizada, compuesta exclusivamente por los valores propios del tensor, es necesario encontrar, por tanto, la base principal y nos serviremos para ello de la propiedad definida en el punto anterior por la cual los transformados de los vectores contenidos en los ejes principales mantienen la dirección del vector original. En consecuencia, si $\vec{w} = \lambda\,\vec{v}$, el transformado de uno de los unitarios $\vec{a}$ será:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \lambda\alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda\alpha_1 &= T_{11}\alpha_1 + T_{12}\alpha_2 + T_{13}\alpha_3 \\ \lambda\alpha_2 &= T_{21}\alpha_1 + T_{22}\alpha_2 + T_{23}\alpha_3 \\ \lambda\alpha_3 &= T_{31}\alpha_1 + T_{32}\alpha_2 + T_{33}\alpha_3 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} (T_{11}-\lambda)\ \alpha_1 + T_{12}\ \alpha_2 + T_{13}\ \alpha_3 &= 0 \\ T_{21}\ \alpha_1 + (T_{22}-\lambda)\ \alpha_2 + T_{23}\ \alpha_3 &= 0 \\ T_{31}\ \alpha_1 + T_{32}\ \alpha_2 + (T_{33}-\lambda)\ \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(10.20)}$$

sistema homogéneo de ecuaciones que para ser compatible tendrá que anularse el determinante de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \textbf{(10.21)}$$

obteniéndose en su desarrollo:

$$\lambda^3 - [T_{11} + T_{22} + T_{33}]\lambda^2 + \left[\begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \right]\lambda - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0 \qquad \textit{(10.22)}$$

ecuación característica del Tensor cuyas soluciones corresponderán a los 3 valores propios que nos proporcionan la forma diagonalizada y que, para el caso de tensores simétricos serán 3 valores reales(2) $\lambda_1 = A_1$, $\lambda_2 = A_2$, $\lambda_3 = A_3$.

Ahora bien, dado que las soluciones de λ son unos valores escalares que no pueden depender de la base elegida para representar el tensor, se entiende que la ecuación característica proporcionará los mismos resultados independientemente de los valores de las componentes T_{ij} que aparezcan reflejados, por lo que los coeficientes de dicha ecuación tampoco variarán. Es decir, acabamos de obtener los 3 INVARIANTES más significativos del Tensor:

$$I_1 = [T_{11} + T_{22} + T_{33}] = [A_1 + A_2 + A_3] \qquad \textit{TRAZA del TENSOR}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix} = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_1 \qquad \textit{∑ ADJUNTOS de la DIAGONAL PRAL.}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{vmatrix} = A_1\, A_2\, A_3 \qquad \textit{DETERMINANTE del TENSOR}$$

(10.23)

pudiéndose haber deducido el primer invariante directamente de la *(10.19)* ya que tendríamos:

$$\begin{aligned} T_{11} &= A_1\alpha_{11}^2 + A_2\alpha_{21}^2 + A_3\alpha_{31}^2 \\ T_{22} &= A_1\alpha_{12}^2 + A_2\alpha_{22}^2 + A_3\alpha_{32}^2 \quad \Rightarrow \quad T_{11} + T_{22} + T_{33} = A_i(\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2) = A_1 + A_2 + A_3 \\ T_{33} &= A_1\alpha_{13}^2 + A_2\alpha_{23}^2 + A_3\alpha_{33}^2 \end{aligned}$$

Finalmente, una vez obtenidos los tres valores propios del Tensor, las direcciones principales correspondientes se determinarían sustituyéndolos sucesivamente en las *(10.20)*, si bien de las 3 ecuaciones obtenidas para cada valor de λ, una será combinación lineal de las otras dos debiendo completarse el sistema con la ecuación que proporciona la suma de los cuadrados de los cosenos directores de cada dirección, ya que partimos de una base ortogonal: $\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 = 1$. Por eso mismo, obtenidas dos de ellas, podría obtenerse también la tercera recurriendo al producto vectorial.

---

(2) *En efecto, partiendo de una solución real* $\lambda_1 = A_1$ *(que siempre existirá) correspondiente a una de las direcciones principales* $\vec{a}_1$ *tendremos que el transformado de* $\vec{a}_1$ *será otro vector* $\lambda_1\vec{a}_1$*; por tanto:*

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} T_{11} = \lambda_l \\ T_{21} = T_{12} = 0 \\ T_{31} = T_{13} = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} \lambda_l & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda_l - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_l - \lambda) \begin{vmatrix} T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

y escribiendo de nuevo la ecuación característica: $(T_{22}-\lambda)(T_{33}-\lambda) - T_{23}T_{32} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (T_{22}+T_{33})\lambda + (T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32}) = 0$ *obteniendo las soluciones:*

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{(T_{22}+T_{33}) \pm \sqrt{(T_{22}+T_{33})^2 - 4(T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32})}}{2}$$ *que para ser reales tendrán que cumplir* $(T_{22}+T_{33})^2 - 4(T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32}) \geq 0$

siendo, en efecto: $T_{22}^2 + T_{33}^2 + 2T_{22}T_{33} - 4T_{22}T_{33} + 4T_{23}T_{32} = T_{22}^2 + T_{33}^2 - 2T_{22}T_{33} + 4T_{23}T_{32} = (T_{22} - T_{33})^2 + 4T_{23}T_{32} \geq 0$ *ya que, en tensores simétricos,* $T_{23} = T_{32}$ *y tienen el mismo signo además.*

10.7 CAMBIO DE BASE. TENSORES ESPECIALES.

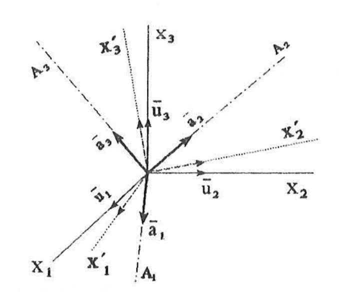


Figura 10.7

Si lo que tenemos es una base ortogonal $x'_1x'_2x'_3$ variable (ejes móviles), y queremos referir los términos del tensor a dicha base a partir de los cosenos directores de sus unitarios respecto a otros iniciales (fijos) podremos escribir:

$$\begin{aligned}\vec u_1' &= \alpha_{11}\vec u_1 + \alpha_{12}\vec u_2 + \alpha_{13}\vec u_3\\ \vec u_2' &= \alpha_{21}\vec u_1 + \alpha_{22}\vec u_2 + \alpha_{23}\vec u_3\\ \vec u_3' &= \alpha_{31}\vec u_1 + \alpha_{32}\vec u_2 + \alpha_{33}\vec u_3\end{aligned} \Rightarrow \begin{vmatrix}\vec u_1'\\ \vec u_2'\\ \vec u_3'\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{vmatrix}\vec u_1\\ \vec u_2\\ \vec u_3\end{vmatrix} \Rightarrow \vec u' = A\,\vec u \qquad (10.24)$$

también expresables en forma reducida: $\vec u_i' = \alpha_{ij}\vec u_j$ o viceversa $\vec u_i = \alpha_{ji}\vec u_j'$.

Por tanto, la relación entre las componentes de un vector referidas a ejes "fijos" $\vec v = v_j\vec u_j$ y a ejes "variables" $\vec v = v_i'\vec u_i'$ será $v_i' = (\vec v\cdot\vec u_i') = (v_j\vec u_j\cdot\alpha_{ij}\vec u_j) = \alpha_{ij}v_j$ y viceversa: $v_i = \alpha_{ji}v_j'$, o bien, utilizando la notación matricial, denominando A la matriz de cambio de base:

$$\begin{vmatrix}v_1'\\ v_2'\\ v_3'\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{vmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{vmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\{\vec v'\} = A\{\vec v\}\\ \textit{y viceversa}\\ \{\vec v\} = A'\{\vec v'\}\end{matrix} \qquad (10.25)$$

expresiones igualmente válidas para los unitarios de las direcciones principales del tensor $\vec a_1, \vec a_2, \vec a_3$ cuyas componentes designaremos ahora, para diferenciarlos de las de cambio de base como:

$$\begin{aligned}\vec a_1 &= \hat\alpha_{1j}\,\vec u_j = \hat\alpha_{1i}{}'\,\vec u_i{}' = \alpha_{ij}\,\hat\alpha_{1j}\,\vec u_i{}'\\ \vec a_2 &= \hat\alpha_{2j}\,\vec u_j = \hat\alpha_{2i}{}'\,\vec u_i{}' = \alpha_{ij}\,\hat\alpha_{2j}\,\vec u_i{}'\\ \vec a_3 &= \hat\alpha_{3j}\,\vec u_j = \hat\alpha_{3i}{}'\,\vec u_i{}' = \alpha_{ij}\,\hat\alpha_{3j}\,\vec u_i{}'\end{aligned}$$

de forma que las componentes del tensor referidas a los ejes fijos $T_{ij} = A_1\,\hat\alpha_{1i}\,\hat\alpha_{1j} + A_2\,\hat\alpha_{2i}\,\hat\alpha_{2j} + A_3\,\hat\alpha_{3i}\,\hat\alpha_{3j} = T_{ji}$ al referirlas a la base variable quedarán:

$$\begin{aligned}T_{ij}{}' &= A_1\,\hat\alpha'_{1i}\,\hat\alpha'_{1j} + A_2\,\hat\alpha'_{2i}\,\hat\alpha'_{2j} + A_3\,\hat\alpha'_{3i}\,\hat\alpha'_{3j} = T_{ji}{}' =\\ &= A_1\alpha_{ik}\hat\alpha_{1k}\alpha_{jl}\hat\alpha_{1l} + A_2\alpha_{ik}\hat\alpha_{2k}\alpha_{jl}\hat\alpha_{2l} + A_3\alpha_{ik}\hat\alpha_{3k}\alpha_{jl}\hat\alpha_{3l} =\\ &= [A_1\,\hat\alpha_{1k}\hat\alpha_{1l} + A_2\,\hat\alpha_{2k}\hat\alpha_{2l} + A_3\,\hat\alpha_{3k}\hat\alpha_{3l}]\,\alpha_{ik}\alpha_{jl} = T_{kl}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\end{aligned} \Rightarrow \begin{matrix}T_{ij}{}' = T_{kl}\alpha_{ik}\alpha_{jl}\\ \textit{y viceversa}\\ T_{ij} = T_{kl}{}'\alpha_{ki}\alpha_{lj}\end{matrix} \qquad (10.26)$$

y las componentes $w_i = T_{ij}v_j$ del vector $\vec w$ transformado por el tensor, serán: $w_i' = T_{ij}'v_j' = T_{kl}\,\alpha_{ik}\,\alpha_{jl}\,\alpha_{js}\,v_s$.

A pesar de su complejidad la *(10.26)* puede expresarse en forma matricial si colocamos sus componentes en el orden correcto: $T_{ij}{}' = \alpha_{ik}\,T_{kl}\,\alpha^t_{lj}$ de forma que $\bar{\bar T}' = A\,\bar{\bar T}\,A^t$:

$$\begin{Vmatrix}T_{11}' & T_{12}' & T_{13}'\\ T_{21}' & T_{22}' & T_{23}'\\ T_{31}' & T_{32}' & T_{33}'\end{Vmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix}\begin{Vmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{21} & T_{22} & T_{23}\\ T_{31} & T_{32} & T_{33}\end{Vmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{32}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{bmatrix} \qquad (10.27)$$

Los tensores que ***no cambian su expresión al cambiar la base*** se denominan **INVARIANTES** y constituyen un caso especial del que el más representativo es el tensor unitario o de Krönecker aunque, obviamente, todos los tensores de orden cero (escalares) también lo son.

CAMPOS DE FUERZAS
MECÁNICA DEL PUNTO MATERIAL

II.1 PRINCIPIOS DE LA MECÁNICA

En Cinemática hemos estudiado el movimiento como un problema aislado, sin tener en cuenta las causas que lo pudieran producir, pero el problema fundamental de la Mecánica consiste en encontrar o definir el estado de movimiento o equilibrio de los cuerpos conocidas aquéllas y para llegar al sólido rígido, idealización del sólido natural (deformable), es necesario previamente considerar una primera idealización al punto material.

Si recordamos el primer principio de la Mecánica Clásica o PRINCIPIO DE INERCIA, "***cuando sobre un punto no actúa ninguna fuerza, o está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo uniforme***". Por tanto, en lo sucesivo consideraremos también éstas, es decir las *FUERZAS*, que definiremos como *las causas que pueden originar el movimiento, modificarlo o incluso anularlo una vez establecido*, como veremos más adelante y cuya relación expresa el 2º PRINCIPIO DE NEWTON o LEY FUNDAMENTAL, *al postular la existencia de al menos unos ejes inerciales respecto de los cuales **"la fuerza que actúa sobre un punto material le imprime una aceleración en la misma dirección y sentido que aquella"*** (*fig.11.1*), *de tal manera que el cociente entre el módulo de la fuerza y el de la aceleración imprimida es una constante que se denomina masa inerte o inercial*:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow\; \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|} = m \qquad (11.1)$$

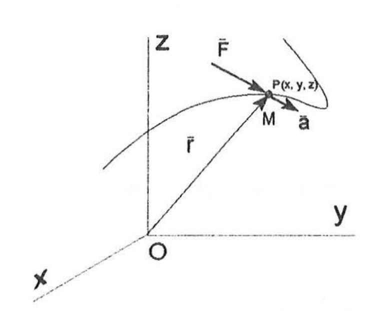


Figura 11.1

siendo importante el cumplimiento de la condición de ejes inerciales porque de no ser así la aceleración absoluta, como hemos visto en Cinemática, sería $\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{a}_r$ y la *(11.1)* para un sistema de referencia que se trasladara con movimiento no uniforme, (además del término complementario en el caso de dicho movimiento no fuera de traslación) quedaría:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,(\vec{a}_o + \vec{a}_r) = m\,\vec{a}_o + m\,\vec{a}_r \;\Rightarrow\; \vec{F} - m\,\vec{a}_o = m\,\vec{a}_r$$

de forma que la fuerza y la aceleración relativa a los ejes elegidos no cumplirían el principio, salvo que el término $m\,\vec{a}_o$ se tradujese en una fuerza ficticia de inercia $\vec{\Phi} = -\,m\,\vec{a}_o$.

Esto nos lleva directamente al tercer principio, denominado PRINCIPIO de ACCIÓN Y REACCIÓN según el cual ***"cuando se aplica una fuerza aparece siempre otra igual y opuesta a ella que la equilibra"***.

- Si la fuerza se aplica a algo que no se puede mover la interpretación clásica será inmediata: aparecerán las fuerzas de reacción anulando las causas que lo tienden a mover: $\vec{F} + \vec{R} = 0$.

- Si por el contrario nada impide el movimiento, aunque no vemos a primera vista esa fuerza que la equilibra, en algún sitio y de alguna forma tiene que aparecer, ya sea tomando ejes móviles ligados al cuerpo, lo que se traduciría en la fuerza de inercia $\vec{\Phi} = -\,m\,\vec{a}$ de forma que respecto a ellos no hubiera movimiento al ser $\vec{F} + \vec{\Phi} = 0$ (PRINCIPIO DE D'ALAMBERT), o bien, tomando ejes fijos de mayor "alcance" que incluirían el agente generador.

En este sentido el peso de los cuerpos, que siempre caemos en el error de considerarlo aislado, tiene sin embargo tiene su pareja en la propia Tierra o dicho de otro modo, en la fuerza con que el cuerpo atrae a la Tierra ya que no es otro que el principio de "***atracción universal***" (de acción de dos masas) que define los campos Newtonianos, según el cual:

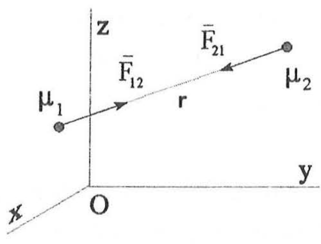


Figura 11.2

"***las acciones que se ejercen entre dos cuerpos***, reducibles a partículas materiales *(fig.11.2)*, ***son dos fuerzas iguales y opuestas que actúan en la recta que les une, que son atractivas y cuyo módulo es directamente proporcional al producto de las masas***[1] ***e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias***".

$$|F_{12}| = |F_{21}| = G\,\frac{\mu\,\mu'}{r^2} \qquad (11.2)$$

11.2 CAMPO DE FUERZAS: CAMPO DE INTENSIDADES.

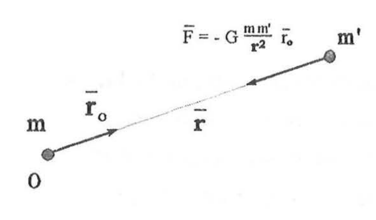


Figura 11.3

Si nos limitamos a estudiar el efecto originado por una de las masas puntuales ***m***, definidas en el principio anterior vemos que, independientemente de la posición que pueda ocupar, la fuerza ejercida sobre ***m'*** es un vector dirigido siempre hacia aquella, cuyo valor es función de la distancia que separa las dos. Esto responde obviamente a la definición de un campo vectorial de los estudiados en su momento ya que se podría expresar como $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ y generalizando, a todo campo vectorial de la forma:

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}(x,y,z,t) = F_x(x,y,z,t)\,\vec{i} + F_y(x,y,z,t)\,\vec{j} + F_z(x,y,z,t)\,\vec{k} \qquad (11.3)$$

cuyos vectores representen fuerzas lo denominaremos **CAMPO DE FUERZAS** pero remarcando que se trata de un campo muy particular porque sería nulo en todos los puntos del espacio a excepción del que ocupase en cada instante la partícula material.

Sin embargo dicho campo está "latente" y no solo se manifiesta cuando la partícula m' se coloca bajo su acción *(fig.11.3)*, sino también para cualquier otra partícula m'' que pudiera aparecer, ya que la fuerza con que ***m*** atraería ***m''*** si ocupase la misma posición que ***m'*** sería un vector de igual dirección y sentido que la fuerza ejercida sobre ésta, cuya diferencia estaría tan solo en dicho valor. Podríamos decir por tanto que lo realmente existente es otro campo vectorial $\vec{E} = -G\,\frac{m\,1}{r^2}\,\vec{r}_o$ asociado al punto geométrico y no al material y que la fuerza $\vec{F}$ que actúa en un instante dado sobre un punto material de masa m, representado por la posición concreta de la partícula (punto geométrico), será un vector $\vec{F} = m\,\vec{E}$ proporcional al vector correspondiente del campo $\vec{E}$ que depende, por tanto, de los mismos parámetros que aquél.

A este campo asociado al punto geométrico se le denomina **CAMPO DE INTENSIDADES**, aunque por cumplir $dv = 0$ se suele mal interpretar como el campo de fuerzas ejercido sobre la unidad de masa y a menudo, para designar la fuerza, en vez de $\vec{F}$, se utiliza inadecuadamente $\vec{E}$.

---

(1) *Se observará que en la (11.2) aparecen los términos μ en vez de las masas m. Esto se debe a que, en primer lugar, queremos resaltar el concepto estático de este principio en contrapartida al concepto dinámico del 2° principio por el que la masa se definía implicando movimiento $m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$ y en segundo lugar porque aunque representan una medida de la materia, dimensionalmente no resulta muy coherente y obliga a dotar de unidades "residuales" a la constante G.*

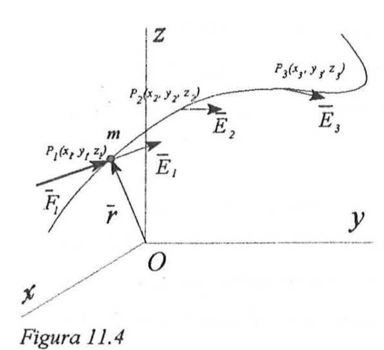


Figura 11.4

Supongamos una masa puntual situada en el punto $_{P_1}(x_1,y_1,z_1)$ *(fig.11.4)*. En ese momento el vector de campo $\vec{F}_1$, correspondiente a P_1, representa la fuerza que actúa sobre ella. Si está en movimiento y describe una cierta trayectoria P_1 P_2 P_3 ..., la fuerza actuante irá variando, siendo en cada instante la fuerza del campo correspondiente al punto en que se encuentra el móvil, pero si permanece en reposo seguirá actuando la misma fuerza del campo (si es estacionario) lo cual parecer contradecirse con el segundo principio ya que no existiría aceleración, lo que indica la existencia de otra fuerza igual y opuesta con la misma recta de acción.

La fuerza que actúa sobre el punto material tiene lugar, pues, por el hecho de encontrase éste en una cierta posición y poseer una masa sensible al campo de intensidades de que se trate. Es decir, *la fuerza estará aplicada a la partícula pero su valor estará asociado a la posición* respecto a la masa puntual central y existirá, independientemente de que esté o no ocupado por una partícula material. Si, por ejemplo, se trata un campo gravitatorio como el terrestre, éste producirá una fuerza (que denominaremos peso) atractiva sobre las masas pero no sobre las cargas eléctricas y en cambio, si se trata de un campo eléctrico, sucederá lo contrario, a no ser que se trate de un punto material sumergido a la vez en un campo gravitatorio y en uno eléctrico, sufriendo los efectos de ambos sometido a la resultante de las dos fuerzas activas.

La más importante de las fuerzas que conocemos, el peso, no es otra cosa que la fuerza con que la Tierra atrae los cuerpos que se encuentran bajo los efectos de su campo de intensidades $\vec{F} = m\,\vec{E}$. De ahí que "la gravedad" no sea ni una fuerza ni una aceleración, como se dice erróneamente muy a menudo, sino una intensidad y como tal sus unidades son [F/m] a pesar de la similitud de dicha expresión con la del 2º Principio: $\vec{F} = m\,\vec{a}$.

La diferencia entre $\vec{E}$ y $\vec{a}$ es que la primera es la ***causa***, la intensidad existente en esa localización independientemente de que haya masa o no, mientras que la segunda es el ***efecto***, lo que le pasa a la masa que se introduce en el campo y de no existir campo (causa) no le pasaría nada (efecto) a la masa. Es, en consecuencia un ejemplo muy ilustrativo de vectores idénticos ya que $\vec{E} = \vec{a}$ y tienen el mismo punto de aplicación. Sin embargo el significado de ambos vectores es opuesto: ***causa*** $\equiv$ ***efecto*** o, dicho de otro modo: la intensidad del campo en un punto sería igual a la aceleración que imprimiría a una masa que estuviera localizada en él.

11.3 CAMPOS CENTRALES. CAMPOS CONSERVATIVOS

En cualquier caso, la definición dada para los campos denominados **NEWTONIANOS** representa un caso particular incluido en otro grupo mucho más general que abarca todos los **CAMPOS CENTRALES**, cuyos vectores tienen por dirección la que une el punto de aplicación M con otro punto fijo O que se denomina centro del campo: $\vec{F} = \lambda\vec{r}$ y por módulo una función de la distancia entre ambos $|\vec{F}| = F(r)$.

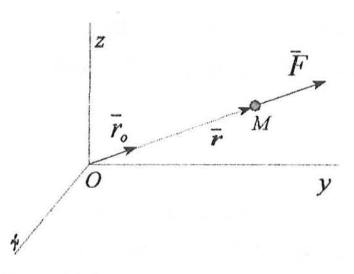


Figura 11.5

De este modo, si $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula material adoptado el punto fijo como origen de coordenadas, *(fig.11.5)*, llamando $\vec{r}_o$ al vector unitario en esa dirección podremos escribir el vector campo en la forma general:

$$\vec{F} = F(r)\,\frac{\vec{r}}{r} = F(r)\,\vec{r}_o \qquad \textbf{(11.4)}$$

Como otro caso particular de los centrales, por tanto, los campos Newtonianos de la *(11.2)* serían de la forma $|\vec{F}| = F(r) = \frac{k}{r^2}$.

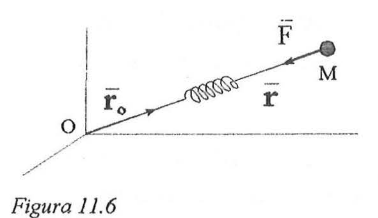


Figura 11.6

Pero vamos a encontrar otra aplicación inmediata en las fuerzas originadas por las deformaciones lineales elásticas cuyo comportamiento se asemeja al de un muelle *(fig.11.6)*, al ser el módulo proporcional al alargamiento $|\vec{F}| = k\,\Delta r = k\,(r - \delta) = F(r)$, donde δ representa la longitud natural, tener la dirección del muelle y sentido hacia el extremo del muelle o el opuesto según sea el de recuperación: $\vec{F} = -\,k\,\Delta r\,\vec{r}_o$.

Por último, dada la importancia de los campos centrales y la asiduidad con que nos los vamos a encontrar en Mecánica, recordaremos una de sus propiedades más importantes: la de que ***todo campo vectorial central es*** ***CONSERVATIVO***; es decir, deriva de una función escalar de forma que $\vec{F} = F(r)\,\vec{r}_o = \vec{grad}\,U$. Una forma de averiguar si un campo vectorial es conservativo o no era comprobar la igualdad de las derivadas cruzadas de sus componentes. Pero había otra forma mucho más inmediata que era encontrar la función U de donde procedía ya que, de existir,

$$\vec{F}^* = \vec{grad}\,U \;\Rightarrow\; dU = \vec{grad}\,U \cdot d\vec{r} = \vec{F}^* \cdot d\vec{r} \;\Rightarrow\; U = \int \vec{F}^* \cdot d\vec{r} \qquad \textit{(11.5)}$$

y puesto que todo campo central es función de una sola variable, r, resulta inmediata dicha integración:

$$U = \int \vec{F}^* \cdot d\vec{r} = \int F(r)\,\vec{r}_o \cdot d\vec{r} = \int F(r)\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = \int F(r)\frac{1}{r}\,[\vec{r} \cdot d\vec{r}\,] =$$
$$\int F(r)\frac{1}{2r}\,d[\vec{r} \cdot \vec{r}\,] = \int F(r)\frac{1}{2r}\,d[r^2] = \int F(r)dr = U(r) \qquad \textit{(11.6)}$$

En consecuencia, las superficies equiescalares de los campos centrales serán esferas.

II.4 TRABAJO. ENERGÍA. POTENCIAL

En principio la idea de trabajo implica "algo" que lo realiza. Supongamos pues un campo de fuerzas, nulo en todos los puntos menos en aquellos donde se localice materia, y una masa puntual m en dicho campo que, por efecto de la fuerza a la que va a estar sometido adquiere una aceleración y una velocidad que origina un cambio de posición de un punto a otro del campo donde otra fuerza le imprime otra aceleración y, en consecuencia, modifica la dirección de la trayectoria ... ; es decir, estamos considerando una trayectoria real.

El primer punto al que tendería a irse la masa de forma natural por efecto de la fuerza actuante del campo sería uno de la trayectoria real, realizando, por tanto, un **DESPLAZAMIENTO REAL** $d\vec{r}$ **NATURAL**. Pero podemos tambien "imaginar" un movimiento cualquiera de la masa con independencia de la fuerza actuante que no tiene por qué ser el que realizaría de forma natural y lo llamaríamos, por tanto, **DESPLAZAMIENTO VIRTUAL** $\delta\vec{r}$. Imaginemos, por último, la masa puntual "ensartada" en un alambre; el único desplazamiento que "podría" realizar de entre los que pudiéramos imaginar sería a lo largo del alambre, es decir el único **REAL COMPATIBLE CON LOS ENLACES**, independientemente del que seguiría libremente bajo la acción del campo de no verse forzado en su trayectoria.

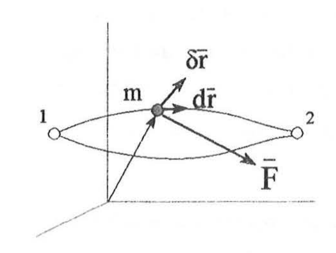


Figura 11.7

Bajo estas premisas y recordando la definición de circulación de un vector de campo a lo largo de una línea, definiremos el ***trabajo elemental*** que ejercerá el punto material para pasar de un punto geométrico a otro (*lo suficientemente próximo como para aceptar que el vector del campo de fuerzas apenas se ha modificado*) como el producto escalar $\delta\mathscr{E} = \vec{F} \cdot \delta\vec{r}$ si el desplazamiento es virtual ó $d\mathscr{E} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si el desplazamiento es real, denominando al primero ***trabajo virtual*** y al segundo ***trabajo real***, siendo éste uno sólo de todos los virtuales posibles.

El concepto de "imaginar" por donde se vaya a romper una cosa es importante bajo el punto de vista de los trabajos virtuales, ya que cubre todas las posibilidades, pero su aplicación está limitada al estudio en el entorno de los puntos ya que no existe trayectoria.

Sin embargo el Trabajo total de la partícula para pasar de un punto 1 a otro 2 *(fig.11.7)* sólo tiene sentido como suma de todos los trabajos elementales reales a lo largo de los puntos de la trayectoria real, que no tiene por qué ser la natural (la que originaría la fuerza) sino venir forzada por algún tipo de ligadura:

$$\mathscr{E} = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} \qquad (11.7)$$

Esta expresión se parece a la de la circulación de un vector, pero solo formalmente, no conceptualmente, ya que la circulación es un concepto abstracto que, al no implicar materia, no puede conllevar qué cosa es la que realiza trabajo. Solo si existe materia podemos hablar de fuerza y, por tanto, de trabajo. Pero, relacionándolo con la circulación, podemos intuir que si la partícula pasa de 1 a 2 por otro camino no tiene, en principio, por qué realizar el mismo trabajo. Sólo ocurría esto en el caso de que el campo de vectores fuera conservativo (procede de la aplicación del gradiente a una determinada función escalar).

En tal caso, ***si el campo de fuerzas es conservativo***, diremos que procede de una cierta función escalar U denominada función de fuerzas que, por conveniencia, definiremos como la función de Energía Potencial cambiada de signo: $E_p = -U$ de forma que:

$$\vec{F} = gr\vec{a}d\, U = -gr\vec{a}d\, E_p \qquad (11.8)$$

y el trabajo resultará:

$$\mathscr{E}_1^2 = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_1^2 gr\vec{a}d\, U \cdot \vec{dr} = \int_1^2 -gr\vec{a}d\, E_p \cdot \vec{dr} = -\int_{E_p^{(1)}}^{E_p^{(2)}} dE_p = E_p^{(1)} - E_p^{(2)} \qquad (11.9)$$

no dependiendo del camino seguido, sino de los valores que asume en los extremos de la trayectoria la función $E_p = -\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = E_p(\vec{r})$ denominada *de* ENERGÍA POTENCIAL; es decir, *el trabajo realizado por la partícula sometida a las fuerzas del campo conservativo es igual a la variación de energía potencial entre el origen y el punto final*, de forma que el trabajo es positivo cuando se deja llevar de forma "natural" por ellas ya que los puntos tienden a ir de mayor a menor energía potencial. O dicho de otro modo, si la fuerza que hace moverse al punto (no siempre la que actúa) es la que realiza el trabajo, éste será positivo por tener la dirección del movimiento.

Procediendo de forma análoga con el campo de intensidades $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$ obtenemos la equivalente a la *(11.9)*:

$$\left[\frac{1}{m}\mathscr{E}_1^2\right] = \int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dr} = \int_1^2 gr\vec{a}d\,\frac{U}{m} \cdot \vec{dr} = \int_1^2 -gr\vec{a}d\,\frac{E_p}{m} \cdot \vec{dr} = \int_1^2 -gr\vec{a}d\, V \cdot \vec{dr} = -\int_{V_1}^{V_2} dV = V_1 - V_2 \qquad (11.10)$$

en la que se ha denominado **POTENCIAL** o Función Potencial a la energía potencial por unidad de masa $V = \frac{E_p}{m} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(\vec{r})$ de forma que, aun no teniendo sentido hablar de trabajo por no tratarse de una fuerza, la *(11.10)* se podría entender como el trabajo realizado por la masa unidad al cambiar de posición, cuyo valor vendrá dado por la diferencia de potencial entre la posición inicial y la final, de forma que si ambas se encuentran en la misma superficie equiescalar (ahora denominada **EQUIPOTENCIAL**), no se realiza trabajo independientemente del camino seguido.

Ahora bien, si queremos averiguar en qué se invierte la energía en los campos conservativos tendremos que introducir la relación causa ($\vec{F}$) ⇒ efecto ($m\,\vec{a}$) a nivel de trabajo, para relacionarlo con el movimiento de la partícula material.

II.5 TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

A partir de la definición de trabajo de una fuerza y conectando con lo estudiado en cinemática podremos expresar el trabajo elemental de las fuerzas aplicadas sobre un punto material en la forma:

$$d\mathscr{E} = \vec{F}\cdot d\vec{r} = m\,\vec{a}\cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\,d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\,v\,dv = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\,v^2\right] = dE_c \qquad (11.11)$$

donde se ha denominado energía cinética al término $\frac{1}{2}mv^2$.

Esta expresión del *Teorema de la Energía Cinética*, por la cual el trabajo elemental realizado por las fuerzas equivale a la variación de la energía cinética del punto material, es válido para todo tipo de fuerza aplicadas a la partícula y constituye una magnitud escalable por lo que, de estar aplicadas varias fuerzas, la variación de energía total sería la suma de todas las producidas por el trabajo elemental de cada una de las fuerzas, cuyo signo podría ser negativo en función del ángulo que formase la fuerza con el desplazamiento elemental.

Es, en definitiva, la ecuación ***analítica*** que va a regir la Mecánica, ***en términos de trabajo***, como alternativa al planteamiento ***en términos de fuerzas***, basado en la ecuación ***vectorial***.

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

Ahora bien, si TODAS las fuerzas aplicadas a la partícula derivasen de un campo escalar se cumpliría, por lo visto anteriormente, que $d\mathscr{E} = -dE_p = dE_c$ y el trabajo total realizado por las fuerzas del campo para pasar de un punto a otro sería:

$$\mathscr{E}_1^2 = E_p^{(1)} - E_p^{(2)} = E_c^{(2)} - E_c^{(1)} \qquad (11.12)$$

es decir, podríamos afirmar que si el trabajo es positivo lo que se ***gana*** en **ENERGÍA CINÉTICA (efecto)** se ***pierde*** de **ENERGÍA POTENCIAL(causa)** y viceversa. Por eso se utiliza la función de Energía Potencial E_P en lugar de la función $U = -E_P$ ya que en tal caso tendríamos que decir que lo que se gana en una se gana en la otra y no da la idea de inversión.

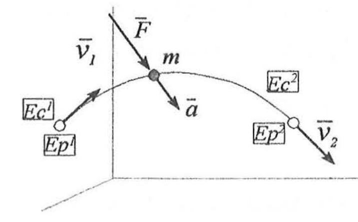


Figura 11.8

Asociando términos en la *(11.12)* para relacionar lo que pasa en la posición inicial con lo que pasa en la final *(fig.11.8)* nos queda:

$$E_p^{(1)} + E_c^{(1)} = E_c^{(2)} + E_p^{(2)} \qquad (11.13)$$

expresión del **PRINCIPIO DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA** por el cual, se mueva el punto como se mueva, *si la fuerza que lo hace moverse deriva de una función escalar*, se conservará la energía mecánica total.

De ahí que se denominen ***conservativos*** estos campos, en los que se verifica, como se recordará, $\vec{rot}\,\vec{F}^* = 0$, en contraposición a los ***disipativos*** cuyo $\vec{rot}\,\vec{F} \neq 0$ y en los que la energía mecánica no se conserva sino que tiende a disminuir, pasando a energía de otra naturaleza, muy frecuentemente térmica.

Dada su gran importancia para el desarrollo de los teoremas que permitirán abordar el estudio de los sistemas materiales y, en especial el del sólido rígido, veremos también los teoremas relativos a la **CANTIDAD DE MOVIMIENTO**, definida como magnitud vectorial: $m\,\vec{v}$ que constituye la clave de los métodos alternativos basados en la expresión analítica de la energía mecánica del punto material.

TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

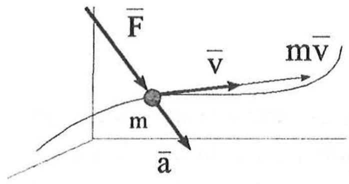


Figura 11.9

A partir de la ecuación fundamental definida por el 2º Principio podemos hacer

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (11.14)$$

relacionando directamente la fuerza aplicada al punto material con la derivada respecto al tiempo del vector *CANTIDAD DE MOVIMIENTO* que acabamos de definir.

La expresión anterior, en la forma $d\vec{I} = \vec{F}\,dt = d(m\vec{v})$, nos define el **IMPULSO** elemental de una fuerza entendida como *la variación de la cantidad de movimiento que imprime en el punto material.* Por tanto su integración, que no tiene por qué ser fácil si tenemos en cuenta que la fuerza puede ser $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v}, \vec{r}, t)$, nos dará el impulso total de la fuerza como incremento de la cantidad de movimiento entre la posición inicial y final

$$\vec{I} = \int \vec{F}\,dt = \Delta m\vec{v} \qquad (11.15)$$

que, supuesta a partir del reposo, permite diferenciar claramente entre *fuerza* e *impulso de una fuerza* al ser la primera un vector proporcional a la velocidad alcanzada $\vec{I} = m\vec{v}$ y el segundo un vector proporcional a la aceleración: $\vec{F} = m\vec{a}$. Casos particulares serán:

$$\vec{F} = c\vec{t}e \quad \Rightarrow \quad \vec{I} = \vec{F}\,\Delta t = \Delta m\vec{v} = c\vec{t}e$$

$$\vec{F} = \lambda\vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad I = F\,\Delta t = \Delta m v \quad (mov.\ rectilíneo)$$

$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad I = 0 \quad \Rightarrow \quad m\vec{v} = c\vec{t}e$$

TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

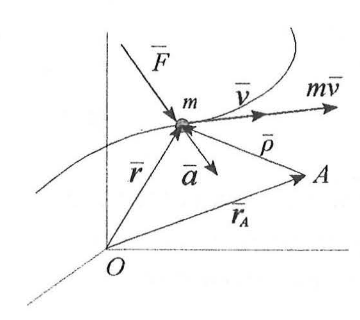


Figura 11.10

Por definición de momento de un vector, diremos que el **MOMENTO** de una **FUERZA** respecto a un punto A (fijo o móvil) será el producto vectorial

$$\vec{M}_A = \vec{\rho} \times \vec{F} = \vec{\rho} \times m\vec{a} = \vec{\rho} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\rho} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad (11.16)$$

mientras que denominaremos **MOMENTO CINÉTICO** al momento de la cantidad de movimiento respecto a dicho punto:

$$\vec{\sigma}_A = \vec{\rho} \times m\vec{v} \qquad (11.17)$$

Por tanto, si derivamos esta última expresión, teniendo en cuenta que si A no es fijo tendrá velocidad respecto a un punto fijo O de forma que $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{r}_A$ y $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_A$ tendremos:

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{\rho} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} = (\vec{v} - \vec{v}_A) \times m\vec{v} + \vec{\rho} \times \frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{M}_A - \vec{v}_A \times m\vec{v} \qquad (11.18)$$

Solamente si A es un punto fijo, por ejemplo el origen de referencia O, o si se mueve en todo instante con velocidad paralela a la del punto material el término $\vec{v}_A \times m\vec{v} = 0$ y la expresión del momento cinético quedará:

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} \qquad (11.19)$$

por la cual "***la variación del momento cinético de un punto material respecto a un punto fijo o cuya velocidad sea en todo instante paralela a la del punto material es igual al momento, respecto a dicho punto, de las fuerzas actuantes (activas y pasivas) sobre la partícula material***".

Independientemente de la importancia que van a alcanzar estos teoremas en la Mecánica del sólido rígido es de remarcar el paralelismo entre la *(11.14)* y la *(11.19)* ya que la primera establece la igualdad entre la fuerza y la derivada del vector cantidad de movimiento, mientras que la segunda lo hace entre el momento de la fuerza y la derivada del momento del dicho vector.

II.6 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO PARA EL PUNTO MATERIAL

A la vista de los Teoremas analizados podemos, cuanto menos, asegurar que no siempre habrá un "*único*" planteamiento posible para resolver los problemas de la Mecánica, pudiéndose diferenciar claramente dos procedimientos alternativos de estudio, según se adopten planteamientos de trabajo-energía (escalares) o de fuerzas (vectoriales):

ENERGÍA $\quad d\mathscr{E} = \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = dE_c \quad$ *y si* $\quad \vec{F}^* = -\,\mathrm{grad}\,E_p \quad \Rightarrow \quad d\mathscr{E} = dE_c = -\,dE_p$

FUERZAS $\quad \vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\,\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} \quad$ *o, si el punto es ligado,* $\quad \vec{M}_o = \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \qquad$ *(11.20)*

si bien los valores que puedan determinarse por ambos, obviamente, no van a diferir.

El planteamiento dependerá fundamentalmente del objetivo ya que por el primero se podrán determinar valores escalares, y recurriremos a él si deseamos conocer solamente las condiciones particulares en una determinada posición, incluida la posición de equilibrio, pero no permiten por sí solas tener definido el movimiento en su totalidad salvo en los casos en que la trayectoria del punto venga limitada por algún tipo de ligadura..

Como fin último, el objetivo de la Mecánica es poder conocer en todo instante la posición de los cuerpos sometidos a un sistema de fuerzas determinado y la del punto material, según vimos en Cinemática, podía quedar determinada indistintamente mediante el conocimientos de alguno de los siguientes datos:

- *las ecuaciones paramétricas del movimiento* $\vec{r} = \vec{r}(t)$
- *la trayectoria Γ y la ley de arcos $s = s(t)$*
- *la trayectoria Γ y la hodógrafa H ...*

Por tanto, en una primera aproximación distinguiremos dos tipos de problemas según se tengan definidas inicialmente las causas del movimiento o el movimiento en sí que, por otro lado, no es lo que habitualmente se va a conocer. Es decir, el problema se resolverá:

- *estudiando el movimiento de la partícula* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *que al cambiar de posición va sufriendo las fuerzas* $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ *correspondientes a la aceleración* $\vec{a}(\vec{r},t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ *en la posición que ocupa en cada instante* $m\,\vec{a}(\vec{r},t) = \vec{F}(\vec{r},t)$ *(problema inverso).*

- *estudiando las fuerzas perseguidoras del punto material que modifican la velocidad con que lo mueven* $\frac{\vec{F}}{m} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ *determinando su posición en cada instante en función de unos datos iniciales que determinan las constantes de integración* $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{\vec{F}}{m}$ *(problema directo)*

En este último caso, conocidas las fuerzas, la integración sucesiva de las ecuaciones que proporciona el problema, con las condiciones iniciales de posición y velocidad, nos lleva a la obtención de las ecuaciones paramétricas del movimiento que, en cartesianas expresaremos como:

$$\begin{matrix} \ddot{x} = \frac{1}{m}F_x \\ \ddot{y} = \frac{1}{m}F_y \\ \ddot{z} = \frac{1}{m}F_z \end{matrix} \quad \int \Rightarrow \quad \begin{matrix} \dot{x} = \dot{x}(t) + v_{ox} \\ \dot{y} = \dot{y}(t) + v_{oy} \\ \dot{z} = \dot{z}(t) + v_{oz} \end{matrix} \quad \int \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = x(t) + v_{ox}t + x_o \\ y = y(t) + v_{oy}t + y_o \\ z = z(t) + v_{oz}t + z_o \end{matrix} \qquad (11.21)$$

aunque en ocasiones, como en los campos centrales, pueda sernos más útil expresar el movimiento mediante coordenadas polares $\vec{r} = r\vec{r}_o$ ya que el plano osculador de la trayectoria será el mismo en todo instante al tener la aceleración la misma dirección que el vector de posición y, por tanto, el movimiento será plano:

$$\begin{matrix} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{\dot{r}d\dot{r}}{dr} - \frac{(r^2\dot{\theta})^2}{r^3} = \frac{F(r)}{m} & \Rightarrow & v_r = \dot{r} & \Rightarrow & r = r(t) \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 & \Rightarrow & v_\theta = r\dot{\theta} & \Rightarrow & \theta = \theta(t) \end{matrix} \qquad (11.22)$$

o bien, cuando se conozca la trayectoria, refiriéndolo al sistema de ejes intrínseco al movimiento, es decir, el formado por la tangente, la normal y la binormal:

$$\begin{matrix} a_\tau = \frac{1}{m}F_\tau = \frac{dv}{dt} \\ a_\nu = \frac{1}{m}F_\nu = \frac{v^2}{\rho} \\ a_\beta = \frac{1}{m}F_\beta = 0 \end{matrix} \quad \int \Rightarrow \quad \begin{matrix} v = v(t) = \frac{ds}{dt} \\ \rho = \rho(t) = \frac{ds}{d\varphi} \end{matrix} \quad \int \Rightarrow \quad \begin{matrix} s = s(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{matrix} \qquad (11.23)$$

En cualquier caso, resulta imprescindible para su resolución el conocimiento de los valores que pueden adoptar las fuerzas en el trascurso del tiempo y su posible dependencia de otros parámetros (función de la posición del punto, del tiempo, de la velocidad ... etc. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{v}, \vec{r}, t)$) siendo de particular importancia para nuestro estudio las fuerzas que dependen exclusivamente de la posición $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ y no de las otras variables como el tiempo (campos estacionarios) o la velocidad.

II.7 EQUILIBRIO DEL PUNTO LIBRE. ESTABILIDAD

Entendiendo como *estado de equilibrio del punto material aquél en el que se den las condiciones necesarias para que no cambie de posición en el transcurso del tiempo respecto de un marco inercial*, o lo que es lo mismo, que no tenga velocidad v=0 y, lo más importante, que tampoco la tenga en un instante anterior o posterior, a=0, diremos que la **ESTÁTICA** será la parte de la Mecánica que estudiará las circunstancias para que pueda darse el equilibrio así como las características del mismo, mientras que la **DINÁMICA** se entenderá como la parte de la Mecánica que determinará las características del movimiento.

Por tanto, como caso particular de la Mecánica, ambas seguirán planteamientos paralelos, entendiendo que la partícula estará en equilibrio en una posición determinada, ***en términos de fuerzas***, si sobre ella no actúan fuerzas o se anulan entre sí: $\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} = 0$ (ya que en tal caso $a = 0 \Rightarrow dv = 0$) o si el momento de las fuerzas respecto a un punto fijo es nulo (ya que entonces $m\,\vec{v} = \vec{c} \Rightarrow dv = 0$) mientras que, ***en términos de trabajo,*** tendrá que anularse cualquier trabajo elemental de las fuerzas aplicadas a la partícula en el entorno de la posición de equilibrio (trabajo virtual, no real) $\delta\mathscr{E} = \Sigma\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r} = 0$ (ya que $d\mathscr{E} = m\,v\,dv = 0$) y, por lo mismo, si las fuerzas derivan exclusivamente de un potencial, que éste alcance valores extremos (máximos o mínimos) dado que $d\mathscr{E} = -dV = 0$.

En ambos casos se ha impuesto la condición $dv = 0$ ya que si $a = 0$ también se cumplirá $a_\tau = 0$ y $dv = a_\tau\,dt = 0$ pero también debe presuponerse que la velocidad en cualquier instante es nula ya que podría estar moviéndose con velocidad $\vec{v}$ constante (movimiento rectilíneo y uniforme) y carecer por tanto de aceleración desde el punto de vista del planteamiento de fuerzas, o análogamente con movimiento circular uniforme y tener componente normal la aceleración pero cumplirse que el trabajo es nulo por serlo dv pero no v.

En definitiva las ecuaciones del equilibrio de un punto material libre se pueden resumir en el siguiente esquema que se reproducirá en lo sucesivo tanto para el punto ligado como para los sistemas materiales y en particular el sólido rígido:

$\Sigma\vec{F}_i = \vec{R} = m\,\vec{a} = \vec{0}$	*Fuerza resultante*	*E. Clásica*	
$\Sigma\vec{M}_o = \frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \vec{r}\times\frac{dm\vec{v}}{dt} = \vec{0}$	*Momento resultante*		***(11.24)***
$\delta\mathscr{E} = \Sigma\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r} = 0$	*Trabajos virtuales*	*E. Analítica*	
$d\mathscr{E} = -\Sigma\,dV_i = 0$	*Potenciales*		

ESTÁTICA CLÁSICA

En definitiva, si la condición de equilibrio es que el punto no cambie su posición a lo largo del tiempo respecto de un marco inercial, adoptando un sistema cartesiano de referencia el problema se resolverá determinando el punto para el que $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$ aunque en otros puntos de su entorno no se cumpla (sin olvidar que la fuerza actuante puede tratarse de la suma de varias fuerzas $\vec{F}_i$) y como no puede depender del tiempo porque el equilibrio no debe romperse con su paso tendremos $\vec{F}(x\,y\,z) = \vec{0} = F_x(x\,y\,z)\,\vec{i} + F_y(x\,y\,z)\,\vec{j} + F_z(x\,y\,z)\,\vec{k}$, lo que nos proporciona un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (x y z) coincidentes con los grados de libertad del punto libre en el espacio, cuya resolución nos determinará, de existir, la posición de equilibrio (aunque encontraremos más de una en general):

$$\begin{array}{lcl} F_x(x\,y\,z) = 0 & & x = x_e \\ F_y(x\,y\,z) = 0 & \Rightarrow & y = y_e \\ F_z(x\,y\,z) = 0 & & z = z_e \end{array} \qquad (11.25)$$

La ecuación de momentos resulta trivial en el caso del punto libre puesto que si la resultante es cero y el momento en un punto también lo es, al considerar el que ocupa la propia partícula donde están aplicadas las fuerzas nos remite a la misma ecuación de las fuerzas. Sin embargo, su utilidad comenzará a ser patente e incluso mayor que la de fuerzas en el punto ligado.

ESTÁTICA ANALÍTICA

TRABAJOS VIRTUALES: En esencia se trata de encontrar la posición para la cual las fuerzas actuantes sobre el punto van a equilibrar sus trabajos teniendo en cuenta que unas darán trabajo positivo y otras negativo para un desplazamiento virtual. $\boldsymbol{\delta \mathscr{E} = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \delta \vec{r} ... = 0}$

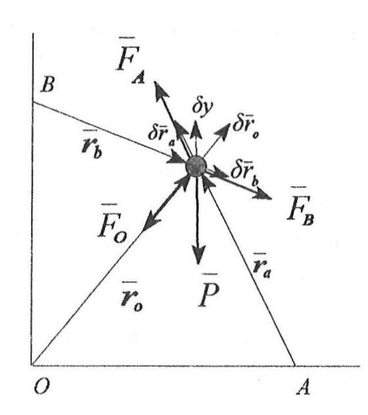


Figura 11.11

Como $\delta \vec{r}$ se puede descomponer, para cada fuerza considerada, en una componente según la dirección de la fuerza y otra normal, que no daría trabajo por tratarse de un producto escalar, basta con plantear desplazamientos en la dirección de cada una de las fuerzas y sentido de incrementar las variables correspondientes para simplificar el problema, teniendo en cuenta que en la expresión final del trabajo elemental no podrán aparecer más variables independientes que grados de libertad.

Por ejemplo, supuesto un punto pesado sometido además a 3 fuerzas centrales que dimanan de los puntos O, A y B, (la primera atractiva y las otras dos repulsivas) directamente proporcionales a la distancia y de igual coeficiente k, haríamos:

$$\begin{matrix} r_O^2 = x^2 + y^2 & & r_o \delta r_o = x\delta x + y\delta y & & \delta\mathscr{E} = -k r_o \delta r_o + k r_A \delta r_A + k r_B \delta r_B - P\delta y = \\ r_A^2 = (a-x)^2 + y^2 & \Rightarrow & r_A \delta r_A = -(a-x)\delta x + y\delta y & \Rightarrow & = -k[x\delta x + y\delta y] - k[(a-x)\delta x - y\delta y] + k[x\delta x - (b-y)\delta y] - P\delta y = \\ r_B^2 = x^2 + (b-y)^2 & & r_B \delta r_B = x\delta x - (b-y)\delta y & & = k[x-a]\delta x + [k(y-b) - P]\delta y = 0 \end{matrix}$$

de forma que para anular el trabajo tendrán que anularse los coeficientes de cada una de las variables x e y ya que el punto tiene dos grados de libertad, obteniendo la posición de equilibrio en $x = a, \quad y = \frac{P}{k} + b$.

POTENCIALES: Un caso particular notable lo van a proporcionar los campos conservativos $\vec{F}^* = -\vec{grad}\, E_n$ dado que:

$$\left.\begin{matrix} F_x^* = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \\ F_y^* = -\frac{\partial E_p}{\partial yx} = 0 \\ F_z^* = -\frac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \end{matrix}\right. \Rightarrow \quad E_p(x\,y\,z) = E_e \qquad \textbf{(11.26)}$$

es decir, ***la POSICIÓN DE EQUILIBRIO de un punto sometido a un campo de fuerzas conservativo coincide con los extremos de la función de energía potencial*** y en tal caso solo necesitamos conocer la función E_p para obtener la posición de equilibrio sin más que anular sus derivadas parciales respecto a las variables independientes x, y, z o su diferencial exacto en caso de que dependa de una única variable (p.ej. los campos centrales) lo que equivale a plantear el equilibrio en términos de trabajo ya que:

$$\frac{dE_p(r)}{dr} = |\, \vec{grad}\, E_p \,| \quad \Rightarrow \quad dE_p(r) = \vec{grad}\, E_p \cdot d\vec{r} = -d\mathscr{E} = 0 \qquad \textbf{(11.27)}$$

En el ejemplo anterior, suma de cuatro campos conservativos, la expresión quedaría exactamente igual:

$$dE_p = k r_o \delta r_o - k r_A \delta r_A - k r_B \delta r_B + P\delta y = k[x\delta x + y\delta y] + k[(a-x)\delta x - y\delta y] - k[x\delta x - (b-y)\delta y] + P\delta y = -k[x-a]\delta x - [k(y-b) - P]\delta y = 0$$

ya que, obviamente no es necesario encontrar la función de energía para volver a derivar.

Como los valores extremos de una función pueden representar los máximos, los mínimos, los casi máximos y los casi mínimos y veíamos que un punto tiende a ir naturalmente de donde hay mayor energía potencial a donde es menor, podemos deducir la importancia de este factor en la configuración del equilibrio, que nos va a permitir asimismo determinar la Estabilidad.

El concepto de ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO es tanto o más importante que el equilibrio mismo ya que, en realidad, las cosas no es que vayan a estar siempre quietas, sino que van a moverse poquito. Por ejemplo, una gradería vibrará por acción de las cargas móviles, pero al ser estable lo va a hacer imperceptiblemente, pareciendo casi quieta. De hecho, las Estructuras se denominaban tradicionalmente Estabilidad de las Construcciones.

En ese sentido diremos que el Equilibrio es **ESTABLE** en un punto cuando al desplazarse ligeramente (en cualquier dirección) de la posición de equilibrio ($\vec{F}(\vec{r}_e) = \vec{0}$) las fuerzas del campo correspondientes a la nueva posición ($\vec{F}(\vec{r}_e + \delta\vec{r}) \neq \vec{0}$) (un poco diferentes por lo general a no ser que se trate de un campo uniforme o descontinuo) tiendan a devolverlo a su posición inicial.

Análogamente, el Equilibrio en un punto será **INESTABLE** cuando al desplazarse ligeramente de la posición de equilibrio las fuerzas del campo correspondientes a la nueva posición tiendan a alejarlo aún más de su posición inicial y, por último, será **INDIFERENTE** cuando al desplazarse ligeramente a cualquier otra posición del entorno de la posición de equilibrio, ésta siga siendo de equilibrio.

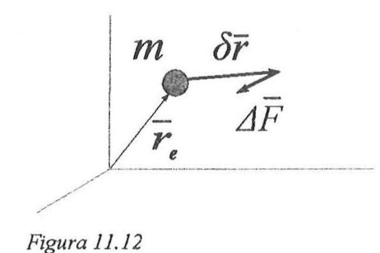


Figura 11.12

Dado que la posición de equilibrio corresponde a los valores extremos de la función de Energía Potencial, al desplazarnos a cualquier otro punto de su entorno, si se trata de un mínimo será $E_p > E_p(e)$ y como el punto tenderá a ir de donde es mayor la energía potencial a donde es menor, volverá a la posición inicial luego es estable. Si está en un máximo: $E_p < E_p(e)$ y se alejará más aún buscando otros puntos de menor energía potencial mientras que si $E_p = E_p(e)$ el punto seguirá en equilibrio.

En general es muy complicado plantear el estudio de la estabilidad en campos no conservativos ya que implica analizar los valores que adoptan las fuerzas para pequeños desplazamientos en cualquier dirección del entorno de la posición de equilibrio.

Sin embargo para los casos particulares de campos conservativos es inmediato ya que tendremos únicamente que analizar la variación de la función escalar E_p y determinar si aumenta o disminuye su valor, lo que se consigue observando el signo de las derivadas sucesivas ya que por el desarrollo de Mc Laurin: $E_p - E_p(e) = dE_p + \frac{1}{2!} d^2E + \ldots + \frac{1}{n!} d^nE$. Cuando hay equilibrio el primer término es sistemáticamente nulo y el signo de la diferencia lo da el término de la derivada segunda o, como caso particular en que también sea nulo, se verá la tercera.

Mediante la exposición anterior hemos obtenido el denominado **TEOREMA DE LEJEUNE DIRICHLET**, que establece que, en las posiciones de equilibrio, el potencial pasa por un valor extremo; siendo inestable si dicho valor es un máximo y estable si es un mínimo.

Supongamos que uno de estos puntos, P, corresponde a un máximo. En tal caso, para los puntos próximos a P el gradiente de V estará dirigido hacia ese punto y, por tanto, $\vec{E} = -\vec{grad}\ V$ en sentido opuesto. Esto significa que, situado el punto material en P, se encontrará en equilibrio pero, al desplazarlo ligeramente de esta posición, actuarán sobre el punto fuerzas cuya resultante tenderá a separarlo aún más, tratándose, en definitiva, de un equilibrio ***inestable***.

Si, por el contrario, V fuera un mínimo en el punto P, cualquier pequeño desplazamiento de la posición de equilibrio daría lugar a fuerzas cuya resultante tendería a llevar de nuevo el punto a dicha posición, lo que define un equilibrio ***estable***.

Si, en una región del espacio, el potencial V se mantiene constante, en ella se verificará $\vec{R}=0$ y será posible desplazar el punto de un lugar a otro de esta región sin que aparezcan fuerzas que favorezcan o se opongan a su movimiento. En tal caso el equilibrio se denomina ***indiferente***.

Si la función depende de una sola variable su determinación será inmediata. En caso contrario se tendrá que recurrir al Hessiano. Si $V=V(\rho,\eta)$ habrá de cumplirse $\frac{\partial V}{\partial \rho}=\frac{\partial V}{\partial \eta}=0$ y para determinar la naturaleza del equilibrio estudiaremos el signo del hessiano:

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial \eta} \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \eta \partial \rho} & \dfrac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} \end{vmatrix}$$

de forma que si:

$H > 0$ $\quad \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}<0$ *máximo*

$\quad\quad\quad \dfrac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}>0$ *mínimo*

$H < 0$ no hay máximo ni mínimo

$H = 0$ debe proseguirse la investigación.

Análogamente se procedería si tuviéramos el caso en que $V=V(\rho,\eta,\nu)$.

II.8 PUNTO LIGADO. EQUIVALENTES DE LAS LIGADURAS

Obviamente las fuerzas (las de los campos) serán las causas que podrán producir el movimiento del punto material pero la experiencia demuestra que, aun existiendo fuerzas actuando sobre la partícula, cuando se da algún tipo de ligadura el movimiento no siempre se va a producir. por lo que las ecuaciones del movimiento no responderían a la realidad. Necesitamos, por tanto, definir unos equivalentes que "revaliden" las ecuaciones del movimiento o la energía para el punto ligado, es decir, cuando tenga restringido alguno de sus grados de libertad que, en el espacio ordinario, coincidirán en número con las coordenadas necesarias para determinar su posición.

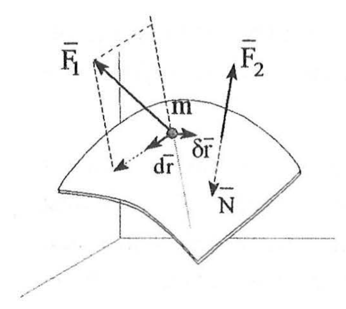


Figura 11.13

Esta limitación podría venir originada al obligarlo a moverse por una superficie determinada, quedando sus movimientos limitados a las direcciones contenidas en el plano tangente a la superficie por el punto de contacto. En tal caso el desplazamiento real no sería el natural que seguiría por acción del campo de fuerzas, sino el único compatible con el vínculo que lo liga a la superficie, pudiendo alcanzar el equilibrio no solo al anularse las fuerzas del campo sino también en caso de que dichas fuerzas fueran normales a la superficie, ya que no habría componente en las únicas direcciones posibles de movimiento de las contenidas en el plano tangente.

Por el *PROCEDIMIENTO DE LAS FUERZAS* estas **LIGADURAS** encuentran su equivalente mecánico en unas **REACCIONES** que se originan para anular el movimiento en la dirección determinada (la normal a la superficie en el ejemplo), no para crearlo, y su valor $\vec{N}$ es por tanto el necesario exclusivamente para anular la componente de las fuerzas activas en esa dirección. Las reacciones se consideran, por tanto, como **FUERZAS PASIVAS** "creadas" para sustituir mecánicamente las coacciones materiales, que impiden el movimiento pero no son causa por sí mismas, (de ahí su nombre en contraposición con las fuerzas activas de las que depende su existencia) y que se cuantifican de modo que su dirección viene fijada por la dirección del movimiento que impiden, su sentido es el contrario al que impiden y su módulo el necesario para lograr su objetivo "hasta alcanzar los límites de la deformabilidad".

Según esta definición, las fuerzas pasivas pueden individualizarse sin problema para cada uno de los grados de libertad que limiten, siendo las más simples las que limitan un solo, posibilitando el movimiento en los otros dos (superficies), luego están las que limitan dos grados de libertad posibilitando únicamente el desplazamiento por una línea y, por último las que fijan la partícula a un punto limitando los tres grados de libertad.

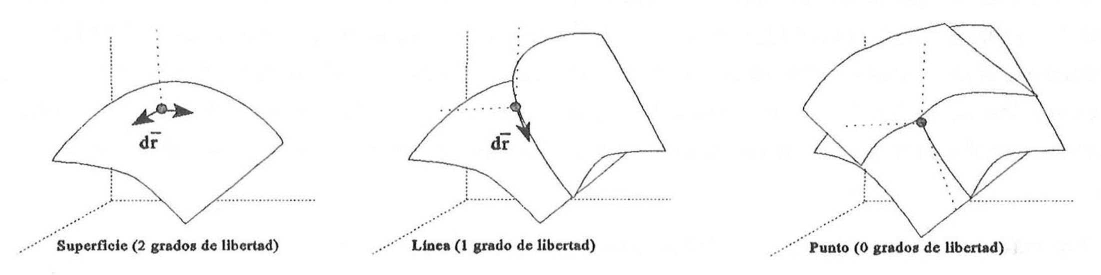


Figura 11.14

Ahora bien, podemos encontrar algunas diferencias según limiten unilateralmente el movimiento en un sentido pero no en el otro: LIGADURAS INCOMPLETAS (por ejemplo los apoyos), o lo impidan en cualquier sentido: LIGADURAS COMPLETAS. Matemáticamente se reflejará como una desigualdad en la función que representa la ligadura para las incompletas o en una igualdad para las completas:

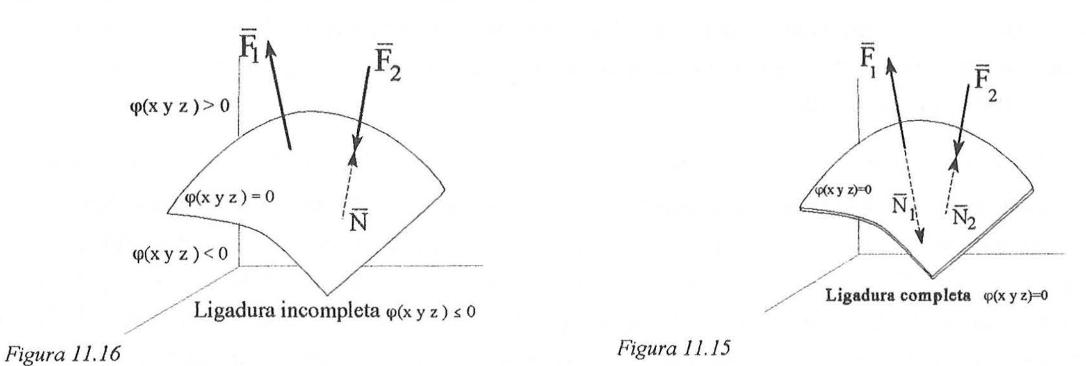


Figura 11.16 *Figura 11.15*

En conclusión, las reacciones que intervienen en el planteamiento clásico de la Mecánica a partir de las Fuerzas se podrán expresar matemáticamente como vectores normales a las superficies y, por tanto, en la forma $\vec{N} = \lambda\, \vec{grad}\, \varphi$, si el punto está ligado a una superficie, o como dos vectores $\vec{N}_1 = \lambda_1\, \vec{grad}\, \varphi_1$ y $\vec{N}_2 = \lambda_2\, \vec{grad}\, \varphi_{12}$ si el punto está ligado a una curva (intersección de dos superficies) y las ecuaciones desarrolladas para unos ejes cartesianos, teniendo en cuenta que se introduce una incógnita nueva, λ_i por cada reacción N_i a considerar, quedan:

Punto ligado a una Superficie:

$$\vec{F}(xyz) + \lambda\, gr\bar{a}d\varphi = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} F_x(xyz) + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\ F_y(xyz) + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \\ F_z(xyz) + \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \\ \varphi(xyz) = 0 \end{array} \right| \quad \text{4 ecuaciones con 4 incógnitas} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = x_e \\ y = y_e \\ z = z_e \\ \lambda = \lambda_e \end{array} \right| \qquad (11.29)$$

Punto ligado a una Curva:

$$\vec{F}(xyz) + \lambda_1 gr\bar{a}d\varphi_1 + \lambda_2 gr\bar{a}d\varphi_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} F_x(xyz) + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0 \\ F_y(xyz) + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0 \\ F_z(xyz) + \lambda_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} = 0 \\ \varphi_1(xyz) = 0 \\ \varphi_2(xyz) = 0 \end{array} \right| \quad \text{5 ecuaciones con 5 incógnitas} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = x_e \\ y = y_e \\ z = z_e \\ \lambda_1 ,, \lambda_2 \end{array} \right| \qquad (11.30)$$

Sin embargo, podremos prescindir de las reacciones si planteamos el problema por procedimientos analíticos de Trabajo, ya que no producen trabajo para los desplazamientos compatibles con los vínculos por ser perpendiculares a ellos. ***El equivalente analítico de las ligaduras*** por este procedimiento son, en consecuencia, ***la propia expresión*** de la ligadura que limitará los desplazamientos a los únicos compatibles y nos permitirá relacionar las variables independientes de referencia para adecuar su número al número resultante de grados de libertad.

Las ecuaciones equivalentes de la Estática para uno y otro método serán:

$$\text{Procedimiento de los Trabajos} \quad \left| \begin{array}{l} \vec{F}_j \cdot \delta\vec{r} = 0 \\ \varphi_i(xyz) = 0 \end{array} \right. \quad \equiv \quad \left. \begin{array}{l} \vec{F}_j + \lambda_i gr\bar{a}d\,\varphi_i(xyz) = 0 \\ \varphi_i(xyz) = 0 \end{array} \right| \quad \text{Procedimiento de las Fuerzas}$$

y como veremos a continuación, el Teorema de Lejeune-Dirichlet es válido también, si las fuerzas derivan de un potencial, para el punto ligado a una superficie o una curva, sin tener en cuenta la fuerzas de reacción, ya que la posición del punto y, por tanto, la variación del potencial, dependen exclusivamente de las fuerzas "activas" y de las limitaciones impuestas por el vínculo cuya ligadura consideraremos perfectamente lisa para no tener en cuenta tampoco las fuerzas debidas al rozamiento.

PUNTO LIGADO A UNA SUPERFICIE $\Phi(x,y,z) = 0$ Si la resultante $\vec{F}$ de las fuerzas aplicadas deriva de un potencial, como el gradiente de éste es normal a la superficie equipotencial correspondiente y, en los puntos de equilibrio, es también normal a la superficie Φ=0, solo habrá equilibrio en los puntos en que la superficie equipotencial que pase por ellos sea tangente a la superficie sobre la que el punto está obligado a permanecer. Estos puntos de tangencia corresponden, en general, a valores extremos de V, entre los que puede tomar esta función en los puntos de la superficie. Si V es máximo, el equilibrio será inestable, siendo estable para V mínimo, como definimos en el epígrafe anterior.

PUNTO LIGADO A UNA CURVA $\Phi_1(x,y,z) = 0$; $\Phi_2(x,y,z) = 0$ También aquí es aplicable el teorema de Lejeune-Dirichlet en los mismos términos que para los casos anteriores del punto libre o ligado a una superficie. Análogamente a lo que ocurre para éste último, el equilibrio será únicamente posible si la tangente a la curva está contenida en un plano tangencial en P a la superficie equipotencial que pase por él. Tales puntos corresponden a máximos y mínimos del potencial V, entre los valores del mismo asequibles en el movimiento a lo largo de la curva.

ÍNDICE DE MATERIAS

II CAMPOS DE FUERZAS · MECÁNICA DEL PUNTO MATERIAL

CUADERNO

